

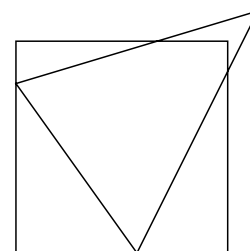
© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch richtig und in grammatisch korrekten Sätzen dar.

650511

In der Abbildung sind ein Quadrat und ein Dreieck dargestellt, die genau vier gemeinsame Punkte haben.

Fertige die Zeichnungen für die Lösungen der Aufgaben a) bis e) mit Bleistift und Lineal an. Du brauchst keine Begründungen zu schreiben.



- Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau einen gemeinsamen Punkt haben.
- Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau zwei gemeinsame Punkte haben.
- Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau drei gemeinsame Punkte haben.
- Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau fünf gemeinsame Punkte haben.
- Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau sechs gemeinsame Punkte haben.

650512

Gesucht werden Zahlen, die alle fünf folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

- Die Zahl ist fünfstellig, sie hat also fünf Ziffern.
- Alle ihre Ziffern sind gerade, und keine Ziffer kommt mehr als einmal vor.
- Das Doppelte der Zahl ist bereits sechsstellig.
- Wenn man die Zahl durch fünf teilt, erhält man den Rest eins.
- Wenn man die Zehnerstelle der Zahl mit der Hunderterstelle multipliziert, ergibt sich null, ebenso, wenn man die Zehnerstelle mit der Tausenderstelle multipliziert.

Ermittle alle Zahlen, die alle fünf Bedingungen erfüllen. Das heißt, du musst zeigen, dass jede Zahl, die du gefunden hast, alle fünf Bedingungen erfüllt, und dass es keine weiteren solcher Zahlen gibt.

Hinweis: Die 0 ist eine gerade Zahl.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650513

Julia hat viele kurze Stäbchen der Länge 10 cm und viele lange Stäbchen der Länge 20 cm. Sie will damit eine Strecke von 70 cm legen.

- a) Gib an, welche unterschiedlichen Anzahlen an 20-cm-Stäbchen sie dazu verwenden kann.
- b) Julia will nun genau zwei 20-cm-Stäbchen benutzen. Überlege, wie sie die benötigten Stäbchen nebeneinander von links nach rechts anordnen kann, um die 70 cm lange Strecke zu legen.
Ermittle die Anzahl der verschiedenen Anordnungen.
- c) Ermittle jetzt die Anzahl **aller** möglichen Anordnungen, wie Julia aus 10-cm-Stäbchen und 20-cm-Stäbchen die Strecke von 70 cm legen kann.

650514

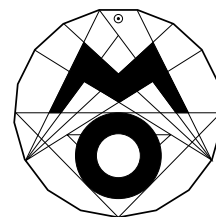
Bea, Emil, Svenja und Victor waren am Eisstand und haben sich jeweils eine Kugel Eis gekauft. Heute gab es die Sorten Banane, Erdbeere, Schoko und Vanille.

Die Kinder hatten verabredet, dass niemand eine Eissorte nimmt, die mit dem gleichen Buchstaben anfängt wie sein Vorname, und jedes Kind wollte eine andere Sorte nehmen.

Ermittle, wer welche Eissorte genommen hat, wenn folgendes bekannt ist:

- (1) Bea hat nicht das Erdbeereis genommen.
- (2) Svenja hat nicht das Bananeneis genommen.
- (3) Emil hat sein Lieblingeis genommen, nämlich Schoko.

Stelle dar, wie du deine Lösung erhalten hast.



© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch richtig und in grammatisch korrekten Sätzen dar.

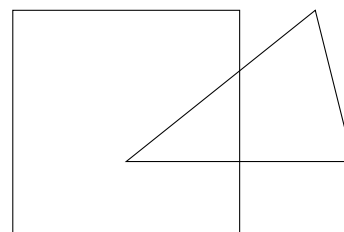
650611

In der Abbildung sind ein Quadrat und ein Dreieck dargestellt, die gemeinsam genau drei Teilflächen enthalten.

Man kann ein Quadrat und ein Dreieck so zeichnen, dass zwei, drei, vier, fünf, sechs bzw. sieben Teilflächen entstehen.

Zeichne für jede Anzahl von Teilflächen ein Beispiel.

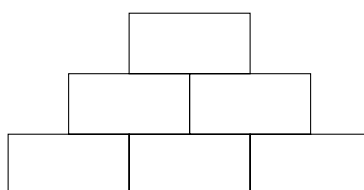
Verwende zum Zeichnen deiner Lösungen Bleistift und Lineal!



650612

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 sollen in dieser Reihenfolge in die sechs Felder der abgebildeten Zahlenmauer so eingetragen werden, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

Eine Zahl darf nur dann in ein Feld der oberen Reihen eingetragen werden, wenn die beiden Felder darunter bereits belegt sind.



- Zeichne zwei Zahlenmauern, die nach diesen Regeln gefüllt sind.
- Untersuche, wie viele verschiedene Zahlenmauern es nach diesen Regeln gibt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650613

Fünf Orte sollen durch Straßen verbunden werden, und zwar mit folgenden Bedingungen:

- Von jedem Ort soll man zu jedem anderen gelangen können.
 - Zwischen zwei Orten darf es nicht mehr als eine Straße geben.
 - Die Straßen dürfen sich nicht kreuzen, es gibt auch keine Brücken.
- a) Zeichne fünf Punkte für die Orte. Verbinde sie durch möglichst wenige Straßen.
Wie viele Straßen muss es mindestens geben?
- b) Zeichne wieder fünf Punkte für die Orte und verbinde sie mit möglichst vielen Straßen.
Wie viele Straßen sind unter den genannten Bedingungen möglich?

650614

Leon packt seinen Koffer für eine Inlineskate-Klassenreise. Dafür braucht Leon einige Gegenstände, die man zu folgenden Preisen auch vor Ort mieten kann:

Kopfkissen: 1 €

Knie- und Ellbogenschützer: 2 €

Helm: 3 €

Schlafsack: 4 €

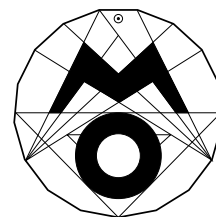
Inlineskates: 5 €

Nachdem Leon seine Kleidung eingepackt hat, ist im Koffer noch Platz. Er überlegt, welche Gegenstände er einpackt und welche er vor Ort mietet. Er weiß:

- (1) Der freie Platz im Koffer würde vollständig vom Kissen eingenommen werden.
- (2) Der Schlafsack würde nur die Hälfte des freien Platzes im Koffer benötigen.
- (3) Die Inlineskates brauchen genauso viel Platz wie der Schlafsack, aber dreimal so viel Platz wie der Beutel mit den Knie- und Ellbogenschützern.
- (4) Der Helm benötigt doppelt so viel Platz wie der Beutel mit den Knie- und Ellbogenschützern

Alle Gegenstände, die Leon nicht einpackt, muss er vor Ort mieten.

- a) Welche Möglichkeiten hat Leon, Gegenstände so einzupacken, dass der Koffer genau voll wird?
- b) Welche Gegenstände muss Leon einpacken, um möglichst wenig Mietkosten zu zahlen? Begründe deine Antwort und berechne die geringsten Mietkosten.



© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

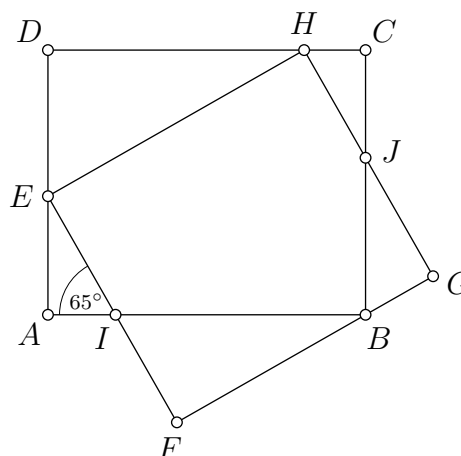
650711

Tarik sieht auf sein Handy, das gerade die Uhrzeit 14:25 Uhr anzeigt. Er multipliziert alle vier Ziffern und erhält als Ziffernprodukt 40.

- Ermittle das kleinste und das größte Ziffernprodukt, das bei Uhrzeiten auftreten kann.
- Ermittle die Anzahl aller Uhrzeiten mit dem Ziffernprodukt 40.

650712

Gegeben sind zwei Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$, bei denen der Punkt E auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt, die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ einander im Punkt I schneiden und der Winkel $\angle EIA$ die Größe 65° hat, der Punkt B auf der Strecke $\overline{FG}$ liegt, der Punkt H auf der Strecke $\overline{CD}$ liegt und die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{GH}$ einander im Punkt J schneiden, siehe die nebenstehende Abbildung.



- Zeige, dass die Dreiecke AIE , BIF , BGJ , CHJ und DEH alle dieselben Innenwinkelgrößen haben.
- Berechne die Größen der Innenwinkel im Fünfeck $BJHEI$.

650713

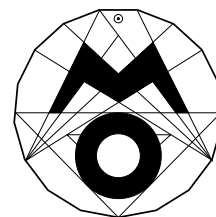
Weise nach, dass es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag gibt, der nie der 31. Tag eines Monats dieses Kalenderjahres ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650714

In einer Ebene sollen fünf Punkte A , B , C , D und E derart liegen, dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.

- a) Zeichne fünf Punkte, die die genannte Forderung erfüllen.
- b) Ermittle die Anzahl aller Geraden, die jeweils genau zwei dieser fünf Punkte enthalten.
- c) Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Ecken jeweils genau drei dieser gegebenen Punkte sind.
- d) Wir betrachten nun fünf weitere Punkte F , G , H , I und J , für die von den Punkten A , B , C , D , E , F , G , H , I und J keine drei auf einer Geraden liegen.
Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Ecken jeweils genau drei dieser gegebenen Punkte sind.



© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

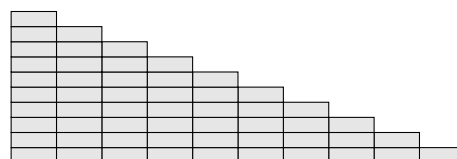
650811

In einer Mathe-AG stellt die AG-Leiterin drei Gefäße auf den Tisch. Das erste Gefäß fasst genau 10 Liter und ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Das zweite Gefäß fasst genau 5 Liter und ist leer. Das dritte Gefäß fasst genau 3 Liter und ist ebenfalls leer. Keines der Gefäße hat eine Mess-Skala. Nur durch Umgießen soll die Wassermenge, die sich im ersten Gefäß befindet, so auf die drei Gefäße verteilt werden, dass sich schließlich in einem der Gefäße genau 1 Liter Wasser befindet. Die AG-Leiterin behauptet: „Das schafft man mit viermaligem Umgießen.“

Beweise, dass diese Behauptung richtig ist.

650812

Marie und Olga sehen in einem Baumarkt ein Ziegeldreieck, das aus Ziegeln, die in Form eines rechtwinkligen Dreiecks gestapelt sind, siehe Abbildung. In der untersten Reihe liegen 10 Ziegel.



In jeder weiteren Reihe darüber liegt ein Ziegel weniger bis zur 10. Reihe, in der nur noch ein Ziegel liegt.

Marie will wissen, wie viele Ziegel dort insgesamt gestapelt sind, und beginnt laut die Anzahlen der jeweiligen Reihen zu addieren. Olga unterbricht sie schnell und nennt die korrekte Anzahl. „Wie bist du so schnell darauf gekommen?“ fragt Marie. Olga antwortet: „Ich habe die Summenformel von Gauß angewandt.“

Der Satz zur Gaußschen Summenformel lautet:

Für alle natürlichen Zahlen n größer als 0 ist $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n .

- Begründe die Gaußsche Summenformel am Beispiel $n = 10$. Ergänze dazu das Ziegeldreieck aus der Abbildung mit einer Kopie des Ziegeldreiecks zu einem Rechteck. Berechne die Anzahl an Ziegeln in diesem Rechteck und damit die Anzahl an Ziegeln im Ziegeldreieck.
- Berechne die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
- Berechne die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 1000.
- Berechne die Summe aller durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen zwischen 65 und 2025.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650813

In einer Reihe liegen genau 65 Karten. Alle Karten liegen mit der Vorderseite nach oben. Die Karten sind von links nach rechts von 1 bis 65 aufsteigend nummeriert.

Im ersten Schritt wird jede Karte umgedreht. Im zweiten Schritt wird jede zweite Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 2, 4, 6, 8 und so weiter. Im dritten Schritt wird jede dritte Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 3, 6, 9, 12 und so weiter. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis im 65. Schritt jede 65. Karte umgedreht wird, also nur die Karte mit der Nummer 65.

Untersuche, welche Karten am Ende mit der Rückseite nach oben liegen.

650814

Das Geometrie-Programm GeoMO zur ebenen Geometrie beherrscht neben der bedingungslosen Wahl von Punkten in der Ebene folgende Konstruktionen jeweils aus vorgegebenen oder schon konstruierten Objekten:

- Konstruktion der **Geraden** durch zwei verschiedene Punkte und des **Kreises** um einen Punkt als Mittelpunkt und durch einen anderen Punkt oder mit der Länge einer Strecke als Radiuslänge.
- Konstruktion der **Schnittpunkte** zweier Geraden, zweier Kreise sowie einer Geraden und eines Kreises.
- Konstruktion der **Mittelsenkrechten** und des **Mittelpunkts** einer Strecke, der **Winkelhalbierenden** eines Winkels, der **Parallelen** und der **Senkrechten** zu einer Geraden durch einen Punkt.
- Konstruktion von **Strecken**, **Strahlen**, **Halbebenen**, **Winkeln**, **Kreisbögen** und **Vielecken** aus sie eindeutig bestimmenden Punkten, Geraden oder Kreisen.
- Auswahl eines Punktes aus mehreren Punkten sowie die Wahl eines Punktes, der auf, innerhalb oder außerhalb eines Objektes liegt, zwischen Objekten liegt oder verschieden von einem Punkt ist.

Weitere Konstruktionen beherrscht dieses Programm nicht, sie sind also bei Bedarf aus den obigen zusammenzusetzen.

In GeoMO sind zwei voneinander verschiedene, zueinander parallele Geraden g und h sowie ein Punkt P zwischen ihnen vorgegeben. Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der g und h berührt und durch P verläuft.

- a) Gib eine Konstruktionsbeschreibung mit Konstruktionsschritten des Programms GeoMO zur Konstruktion eines solchen Kreises an.
- b) Fertige eine Zeichnung mit den in der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) beschriebenen Punkten, Geraden und Kreisen an und beschrifte in dieser Zeichnung die verwendeten Punkte, Geraden und Kreise.
- c) Begründe, warum der nach der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) konstruierte Kreis k die Forderungen erfüllt.



© 2025 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

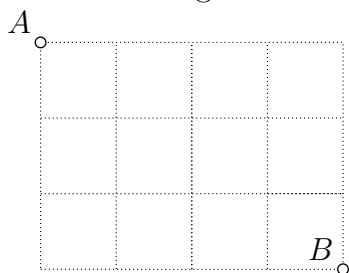
Hinweise: 1. Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.

2. Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

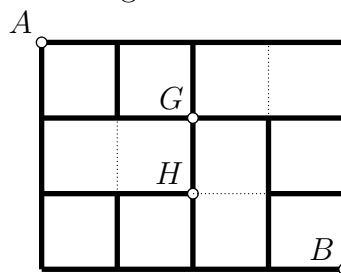
651011

In allen Aufgabenteilen betrachten wir Wegepläne, deren Wege auf den Gitterlinien eines Quadratgitters (wie Abbildung A 651011 a) liegen und deren Zielpunkt rechts unterhalb des Startpunkts liegt. In den Grafiken sind die Gitterlinien als gepunktete und die Wege als fette Linien dargestellt (siehe Abbildung A 651011 b). Die Wegepläne sind rechteckig, d.h. ihr äußerer Rand ist ein Rechteck, bei dem Start- und Zielpunkt einander als Eckpunkte diagonal gegenüberliegen. Die Gitterquadratseiten seien Einheitsstrecken (haben also die Länge 1). Gefragt wird jeweils nach der Anzahl der kürzesten Wege vom Start- zum Zielpunkt auf dem Wegeplan. Die Antwort kann in a) und in b) ohne Begründung angegeben werden.

- Wie viele kürzeste Wege von A nach G und wie viele kürzeste Wege von A nach H gibt es in Abbildung A 651011 b?
- Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es in Abbildung A 651011 b?



A 651011 a



A 651011 b

- Entwerfen Sie einen rechteckigen Wegeplan mit einem Startpunkt A und einem weiter rechts und weiter unten liegenden Zielpunkt B , in welchem es genau 20 kürzeste Wege von A nach B gibt. Wege zählen dabei nur als kürzeste Wege, wenn sie nur von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen werden. Hier ist nachzuweisen, dass es tatsächlich 20 Wege sind.

Hinweis: Das zugrunde gelegte Quadratgitter darf von der Größe 3×4 der Beispielabbildung (Abbildung A 651011 a) abweichen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651012

In dieser Aufgabe sind a und b positive ganze Zahlen.

- a) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 65$ an.
- b) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 340$ an.
- c) Hat die Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ Lösungen, bei denen a und b ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Hinweis: Die Gleichung $a^2 + b^2 = 13$ hat im Bereich der positiven ganzen Zahlen die Lösungen $(2, 3)$ und $(3, 2)$, denn es gilt

$$2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

651013

In dieser Aufgabe werden drei lineare Gleichungssysteme mit zunächst in a) und b) jeweils vier und in c) mit sechs Unbekannten untersucht. Die Variablen sollen dabei durch reelle Zahlen ersetzt werden, sodass alle Gleichungen erfüllt sind.

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$a + b + c = 1 \tag{1}$$

$$b + c + d = 2 \tag{2}$$

$$c + d + a = 3 \tag{3}$$

$$d + a + b = 4 \tag{4}$$

Hinweis: Erkennen Sie, wie man zuerst die Summe $a + b + c + d$ bestimmen kann?

- b) Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$a + b = 0 \tag{1}$$

$$b + c = 0 \tag{2}$$

$$c + d = 0 \tag{3}$$

$$d + a = 1 \tag{4}$$

- c) Geben Sie zwei verschiedene Lösungen des folgenden Gleichungssystems an.

$$a + b + c = 0 \tag{1}$$

$$b + c + d = 0 \tag{2}$$

$$c + d + e = 0 \tag{3}$$

$$d + e + f = 0 \tag{4}$$

$$e + f + a = 0 \tag{5}$$

$$f + a + b = 0 \tag{6}$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651014

In dieser Aufgabe sollen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dabei werden zufällig zwei bzw. drei Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) aus der Menge der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\{2025, 2026, 2027, \dots, 2039, 2040\}$ gezogen.

- a) Es werden genau zwei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die positive Differenz der beiden Zahlen durch 6 teilbar?
- b) Es werden genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens 6116?

Hinweis: Zufälliges Ziehen soll bedeuten, dass alle Möglichkeiten des Ziehens von zwei bzw. drei Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten.

651015

In einem rechtwinkligem Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-1, 0)$, $B(b, 3)$, $C(1, 6)$ und $D(-3, 2)$ gegeben. Dabei ist b eine reelle Zahl größer als -2 .

Bestimmen Sie jeweils alle Werte von b , für die

- a) die vier Punkte ein bei C rechtwinkliges Viereck $ABCD$ bilden,
- b) die vier Punkte ein Trapez $ABCD$ bilden,
- c) die vier Punkte ein Sehnenviereck $ABCD$ bilden,
- d) die vier Punkte ein Viereck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 bilden.

651016

Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0, 18)$, $B(0, 12)$, $C(8, 12)$, $D(0, 0)$ und $E(24, 0)$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden CD und BE . Der Punkt F sei der Schnittpunkt der Gerade AS mit der x -Achse.

- a) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks DFS und des Dreiecks FES .
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CSE .



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

651211

Die sechsstellige Zahl 651211, die Nummer dieser Aufgabe, hat folgende Eigenschaften:

- (1) Die Ziffer 0 kommt nicht vor.
- (2) Die Summe der beiden ersten Ziffern ist gleich der Zahl, die die beiden letzten Ziffern bilden.
- (3) Die Zahl, die die beiden mittleren Ziffern bilden, ist um 1 größer als die Summe der beiden ersten Ziffern.

Durch diese drei Bedingungen ist die Zahl 651211 nicht eindeutig bestimmt.

Man ermittle, wie viele sechsstellige Zahlen es gibt, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen.

651212

Von vier positiven ganzen Zahlen ist folgendes bekannt:

- (1) Alle Zahlen sind ungerade. Keine zwei der Zahlen sind gleich.
- (2) Die kleinsten zwei der Zahlen sind Primzahlen.
- (3) Ordnet man die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge, so bilden die drei Differenzen benachbarter Zahlen eine streng monoton wachsende arithmetische Folge.

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produkts aller vier Zahlen.

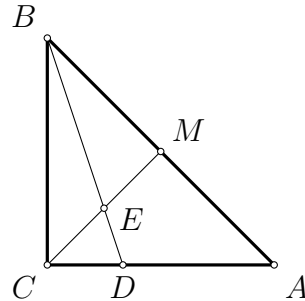
Hinweis: Eine Folge $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ von Zahlen heißt *streng monoton wachsend*, wenn $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k$ gilt. Die Folge ist eine *arithmetische Folge*, wenn es eine feste Zahl r gibt, für die $n_2 = n_1 + r$, $n_3 = n_2 + r$, $n_4 = n_3 + r$, $\dots$, $n_{k-1} = n_{k-2} + r$ und $n_k = n_{k-1} + r$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651213

Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C . Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, und der Punkt D liegt auf der Strecke $\overline{CA}$. Die Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{BD}$ schneiden sich im Punkt E , vgl. Abbildung A 651213.

Man bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $DAME$, wenn $\overline{CA}$ die Länge 12 und $\overline{CD}$ die Länge 4 hat.



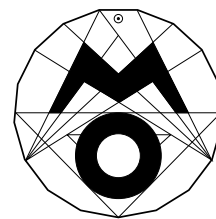
A 651213

651214

Ein König will die acht Ritter seines Reichs zu einem Fest einladen. In der Königsburg gibt es aber nur fünf Gästezimmer, sodass drei Ritter gemeinsam im Saal einquartiert werden müssen.

Nun weiß der König, dass eine gewisse Zahl n von Paaren seiner Ritter gerade in Fehde liegen. Von jedem dieser Paare kann jeweils höchstens ein Ritter im Saal untergebracht werden.

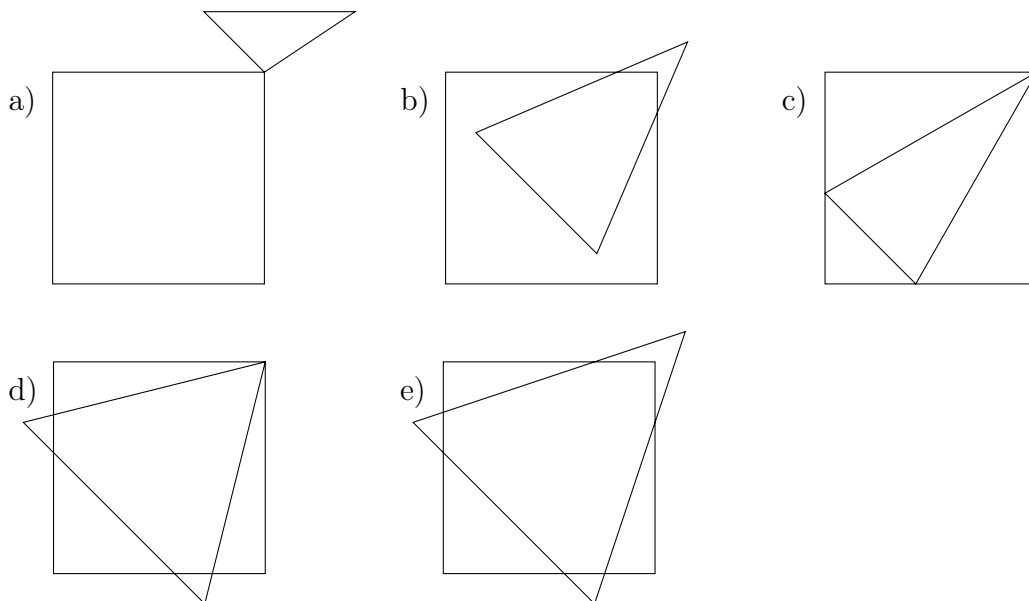
- Man zeige, dass die Ritter immer konfliktfrei einquartiert werden können, wenn $n \leq 11$ gilt.
- Man zeige, dass für $n \geq 12$ eine konfliktfreie Belegung des Saals nicht in jedem Fall möglich ist.



650511 Lösung

10 Punkte

Beispiele:



650512 Lösung

10 Punkte

Aus (1) folgt: Die Zahlen haben die Form $abcde$, wobei die erste Ziffer, also a , nicht 0 sein kann.

Die Aussage (2) besagt, dass alle Ziffern gerade sind und keine Ziffer mehrfach vorkommt. Da es nur fünf gerade Ziffern – nämlich 0, 2, 4, 6 und 8 – gibt, müssen alle diese Ziffern vorkommen.

Aus (3) folgt, dass die gesuchten Zahlen größer oder gleich 50 000 sind, denn sonst wäre ihr Doppeltes nicht sechstellig.

Folglich kann die Ziffer a nur eine 6 oder eine 8 sein.

Aus (4) folgt, dass $e = 6$ gilt, da nur eine Zahl mit dieser geraden Endziffer bei Division durch 5 den Rest 1 lässt.

Folglich ist die Ziffer a die 8, und die Ziffern 0, 2 und 4 müssen b , c und d sein.

Aus (5) folgt, dass d , die Zehnerstelle, die 0 sein muss.

Weitere Informationen liegen nicht vor.

Folglich erfüllen genau die Zahlen 82 406 und 84 206 alle Bedingungen:

- Beide Zahlen sind fünfstellig (1).
- Beide Zahlen haben nur gerade Ziffern, die alle voneinander verschieden sind (2).

- Das Doppelte beider Zahlen liegt über 100 000 und ist damit sechsstellig (3).
- Beide Zahlen lassen bei der Division durch 5 den Rest 1 (4).
- Da die Zehnerstelle bei beiden Zahlen eine 0 ist, ist damit auch (5) erfüllt.

650513 Lösung

10 Punkte

Teil a) Da $70 = 0 \cdot 20 + 7 \cdot 10 = 1 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 = 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10$, gilt kann Julia kein, ein, zwei oder drei der längeren Stäbchen verwenden.

Teil b) Julia muss zwei 20-cm-Stäbchen und drei 10-cm-Stäbchen verwenden; die beiden Typen seien mit 2 und 1 abgekürzt.

Die möglichen Anordnungen sind 11122, 11212, 12112, 21112, 11221, 12121, 21121, 12211, 21211 und 22111.

Also gibt es zehn Möglichkeiten.

Teil c) Für kein langes Stäbchen gibt es nur die Reihenfolge 111111.

Für ein langes Stäbchen gibt es die Reihenfolgen 111112, 111121, 111211, 112111, 121111 und 211111.

Für zwei lange Stäbchen sind die zehn möglichen Anordnungen bereits bekannt.

Für drei lange Stäbchen gibt es die Möglichkeiten 1222, 2122, 2212 und 2221.

Insgesamt hat Julia also $(1 + 6 + 10 + 4 =)$ 21 Möglichkeiten der Anordnung.

650514 Lösung

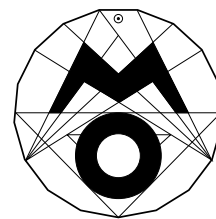
10 Punkte

Wegen (3) hat **Emil das Schokoeis** genommen.

Bea kann wegen (3) nicht Schoko, wegen (1) nicht Erdbeer und wegen ihres Anfangsbuchstaben auch nicht Banane genommen haben. **Bea hat also das Vanilleeis genommen.**

Svenja kann nicht das Schokoeis (hat Emil), nicht das Vanilleeis (hat Bea) und wegen (2) nicht das Bananeneis genommen haben. **Svenja hat das Erdbeereis genommen.**

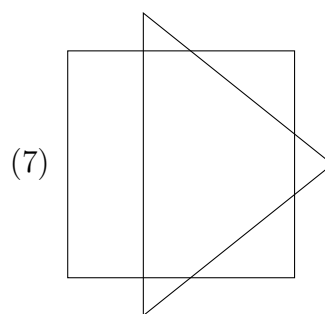
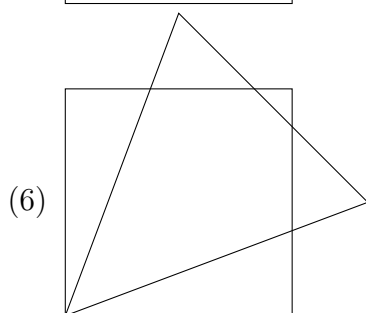
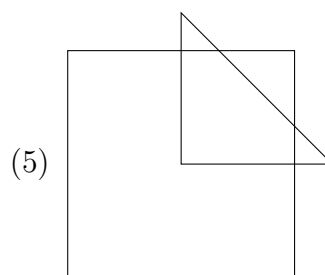
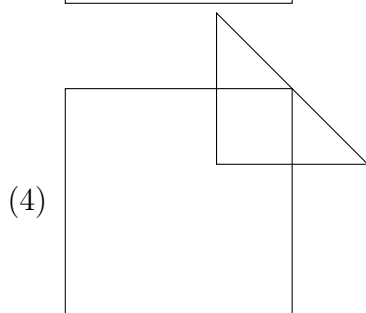
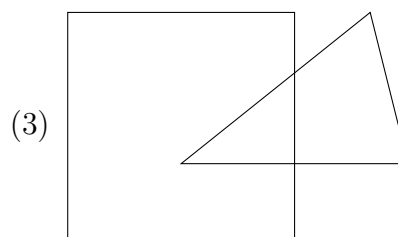
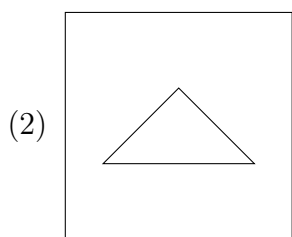
Das Bananeneis muss Victor genommen haben, weil dieses noch übrig ist und auch nicht mit dem Buchstaben V anfängt.



650611 Lösung

10 Punkte

Dies sind mögliche Beispiele für die sechs verschiedenen Anzahlen von Teilflächen. Die Anzahl an Teilflächen steht jeweils in Klammern davor.



650612 Lösung

10 Punkte

Teil a) Möglich sind genau jene Eintragungen, bei denen die 6 ganz oben steht und

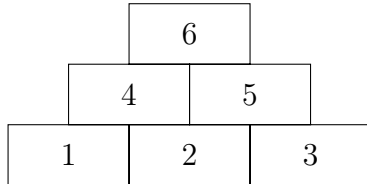
- 1, 2 und 3 in der untersten Zeile sind oder
- 1, 2, 4 so in der untersten Zeile stehen, dass 1 und 2 benachbart sind und die 3 gerade über diesen beiden liegt.

Teil b) Da ein Feld der mittleren Zeile erst belegt werden kann, wenn die zwei darunter liegenden Felder beschriftet wurden, müssen die 1 und die 2 immer in die unterste Zeile geschrieben werden.

Weiterhin dürfen oberhalb einer Zahl nur größere Zahlen eingetragen werden, sodass die 6 immer in der obersten und die 5 direkt darunter, also in der mittleren Zeile, steht.

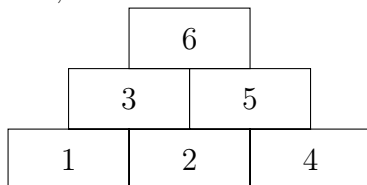
Lediglich die Zahlen 3 und 4 können sowohl in der untersten Zeile als auch in der mittleren auftreten, sodass zur Berechnung der Anzahl von Möglichkeiten zwei Fälle unterschieden werden können:

Fall 1: 1, 2 und 3 stehen in der untersten Zeile, z. B.:



Hier gibt es $(3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 6 Möglichkeiten, die Zahlen 1, 2 und 3 in die unterste Zeile einzutragen und jeweils 2 Möglichkeiten, die mittlere Zeile zu beschriften. Insgesamt sind es in diesem Fall folglich $(6 \cdot 2 =)$ 12 Möglichkeiten, die aufgrund der Konstruktion alle den Bedingungen der Aufgabenstellung entsprechen.

Fall 2: 1, 2 und 4 stehen in der untersten Zeile, z. B.:



Eine solche Zahlenmauer kann nur entstehen, wenn die 3 über der 1 und der 2 eingetragen wurde – diese beiden Zahlen müssen also nebeneinander stehen. Dabei gibt es für die unterste Zeile zwei Möglichkeiten für die Anordnung der Zahlen 1 und 2 und zwei Möglichkeiten dafür, ob die 4 rechts oder links davon steht. Bei jeder dieser $(2 \cdot 2 =)$ 4 Möglichkeiten ist der Rest der Zahlenmauer bereits dadurch festgelegt, dass die 3 über der 1 und der 2 stehen muss sowie die 6 nur ins oberste Feld passt.

Antwort: Unter Einhaltung dieser Regeln gibt es insgesamt $(12 + 4 =)$ 16 mögliche Zahlenmauern.

650613 Lösung

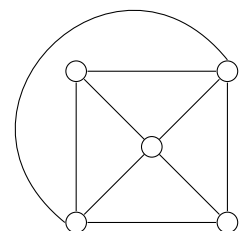
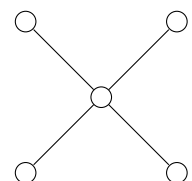
Teil a) Nehmen wir eine Stadt und verbinden sie mit allen anderen vier Städten, dann sind alle Städte miteinander kreuzungsfrei verbunden. Weniger Wege sind nicht möglich.

Folglich muss es mindestens vier Wege geben.

Teil b) Wenn man alle Wege einzeichnen würde, die je zwei Städte verbinden, ergäbe das zehn Wege. Allerdings ist der letzte Weg nicht mehr kreuzungsfrei durchzuführen: Die Maximalzahl ist neun Wege.

Die Zeichnung zeigt, dass dies auch möglich ist.

10 Punkte



Teil a) Da die Inlineskates dreimal so viel Platz benötigen wie die Knie- und Ellbogenschützer und da der Helm doppelt so viel Platz benötigt wie die Knie- und Ellbogenschützer, nehmen der Helm und die Knie- und Ellbogenschützer zusammen so viel Platz ein wie die Inlineskates. Da Inlineskates, Schlafsack und Kissen je den halben bzw. den ganzen freien Platz im Koffer füllen würden, wird Leon die Knie- und Ellbogenschützer nur zusammen mit dem Helm einpacken, da anderenfalls Platz frei bliebe.

Entweder, Leon nimmt das Kissen mit, oder er wählt zwei der drei Möglichkeiten aus, mit denen er je den halben Koffer füllen kann.

Deswegen gibt es vier Möglichkeiten, den Koffer zu packen:

Kissen

Schlafsack und Inlineskates

Schlafsack und Helm und Knie- und Ellbogenschützer

Inlineskates und Helm und Knie- und Ellbogenschützer

Teil b) Von den $(1\text{ €} + 2\text{ €} + 3\text{ €} + 4\text{ €} + 5\text{ €} =) 15\text{ €}$, die das Mieten aller Gegenstände kosten würde, spart Leon dabei:

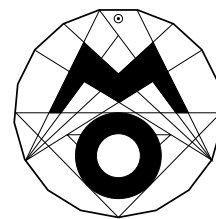
Kissen: 1 €

Schlafsack und Inlineskates: $(4\text{ €} + 5\text{ €} =) 9\text{ €}$

Schlafsack und Helm und Knie- und Ellbogenschützer: $(2\text{ €} + 3\text{ €} + 4\text{ €} =) 9\text{ €}$

Inlineskates und Helm und Knie- und Ellbogenschützer: $(2\text{ €} + 3\text{ €} + 5\text{ €} =) 10\text{ €}$

Leon spart also am meisten, wenn er Inlineskates, Helm und Knie- und Ellbogenschützer einpackt. Er muss dann für Kissen und Schlafsack noch $(1\text{ €} + 4\text{ €} =) 5\text{ €}$ Miete zahlen.



650711 Lösung

10 Punkte

Teil a) Das kleinste Ziffernprodukt ist 0. Es entsteht bei allen Uhrzeiten, bei denen mindestens eine Ziffer 0 ist, also zum Beispiel bei jeder vollen Stunde.

Von allen Stundenzahlen von 00 bis 23 hat 19 das größte Ziffernprodukt. Von allen Minutenzahlen von 00 bis 59 hat 59 das größte Ziffernprodukt. Da 19:59 auch eine zulässige Uhrzeit ist, ist folglich $(1 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 9 =)$ 405 das größte Ziffernprodukt aller Uhrzeiten.

Teil b) Das Ziffernprodukt 40 hat die Primfaktorzerlegung $2^3 \cdot 5$. Daher können die vier Ziffern bis auf ihre Reihenfolge nur 2, 2, 2, 5 oder 1, 2, 4, 5 oder 1, 1, 8, 5 sein.

Fall 1: Die vier Ziffern sind 2, 2, 2 und 5.

Da keine Uhrzeit die Stundenangabe 25 oder 52 hat, gibt es hier nur die zwei Uhrzeiten 22:25 und 22:52.

Fall 2: Die vier Ziffern sind 1, 2, 4 und 5.

Wenn die Ziffer 1 an der Zehnerstelle der Stundenzahl steht, dann gibt es als Permutation der anderen drei Ziffern hier nur die sechs gültigen Uhrzeiten 12:45, 12:54, 14:25, 14:52, 15:24 und 15:42. Wenn die Ziffer 2 an der Zehnerstelle der Stundenzahl steht, gibt es hier nur die zwei Uhrzeiten 21:45 und 21:54, da keine Uhrzeit mit 24 oder 25 beginnt. Ebenfalls gibt es keine Uhrzeit mit den Ziffern 4 oder 5 an der Zehnerstelle der Stundenzahl.

Fall 3: Die vier Ziffern sind 1, 1, 8 und 5.

Da die Ziffer 8 nur an der Einerstelle der Stundenzahl oder an der Einerstelle der Minutenzahl auftreten kann und auch die Ziffer 5 nicht an der Zehnerstelle der Stundenzahl stehen kann, gibt es hier nur die vier Uhrzeiten 11:58, 15:18, 18:15 und 18:51.

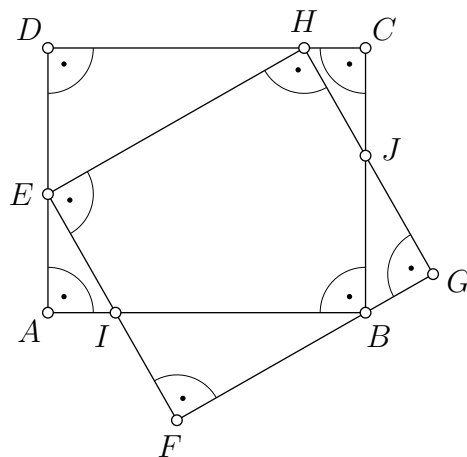
Da die Fallunterscheidung vollständig ist und sich keine zwei der Fälle überschneiden, ist $(2 + 8 + 4 =)$ 14 die Anzahl aller Uhrzeiten mit dem Ziffernprodukt 40.

650712 Lösung

10 Punkte

Teil a) Da die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ nach Voraussetzung Rechtecke sind, sind deren Innenwinkel rechte Winkel. Hieraus und wegen der vorausgesetzten Lage des Punktes B auf der Strecke $\overline{FG}$, des Punktes E auf der Strecke $\overline{AD}$, des Punktes I auf den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ sowie des Punktes J auf den Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{GH}$ sind die Dreiecke AIE , BIF , BGJ , CHJ und DEH rechtwinklig in den Punkten A , F , G , C bzw. D , die Winkel $\sphericalangle IAE$, $\sphericalangle BFI$, $\sphericalangle JGB$, $\sphericalangle HCJ$ und $\sphericalangle EDH$ sind also rechte Winkel. Aus diesen Voraussetzungen folgt auch, dass die Winkel $\sphericalangle IEH$, $\sphericalangle JBI$ und $\sphericalangle EHJ$ rechte Winkel sind, siehe die Abbildung.

Bei den Dreiecken AIE und BIF sind die Innenwinkel im Punkt I zueinander Scheitelwinkel und nach dem Scheitelwinkelsatz daher gleich groß. Nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz ergänzen sich die Größen der Innenwinkel dieser Dreiecke in den Punkten B und E mit den im Punkt I zu 90° , weswegen auch sie gleich groß sind. Die Dreiecke AIE und BIF haben daher dieselben Innenwinkelgrößen. Bei den Dreiecken BGJ und CHJ sind die Innenwinkel im Punkt J zueinander Scheitelwinkel, weswegen entsprechend auch hier folgt, dass die Dreiecke BGJ und CHJ dieselben Innenwinkelgrößen haben.



Bei den Dreiecken AIE und DEH ergänzen sich die Innenwinkel dieser Dreiecke im Punkt E mit dem rechten Winkel $\sphericalangle IEH$ zu einem gestreckten Winkel. Die Summe der Größen der Innenwinkel der Dreiecke AIE und DEH im Punkt E ist daher 90° . Nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz folgt hieraus, dass der Innenwinkel des Dreiecks AIE im Punkt E gleich groß wie der Innenwinkel des Dreiecks DEH im Punkt H ist und der Innenwinkel des Dreiecks DEH im Punkt E gleich groß wie der Innenwinkel des Dreiecks AIE im Punkt I ist. Folglich haben die Dreiecke AIE und DEH dieselben Innenwinkelgrößen. Entsprechend folgt, dass auch die Dreiecke BIF und BGJ sowie die Dreiecke CHJ und DEH dieselben Innenwinkelgrößen haben.

Daher haben die Dreiecke AIE , BIF , BGJ , CHJ und DEH alle dieselben Innenwinkelgrößen.

Teil b) Wie in Teil a) schon festgestellt, sind die Innenwinkel $\sphericalangle JBI$, $\sphericalangle EHJ$ und $\sphericalangle IEH$ des Fünfecks $BJHEI$ rechte Winkel.

Nach Voraussetzung gilt $|\sphericalangle EIA| = 65^\circ$. Der Innenwinkel $\sphericalangle BIE$ des Fünfecks $BJHEI$ ist ein Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle EIA$. Nach dem Nebenwinkelsatz gilt daher

$$|\sphericalangle BIE| = 180^\circ - |\sphericalangle EIA| = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Nach dem Dreiecksinnenwinkelsatz gilt

$$|\sphericalangle AEI| = 180^\circ - |\sphericalangle IAE| - |\sphericalangle EIA| = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

Wie in Teil a) festgestellt, haben die Dreiecke AIE und CHJ dieselben Innenwinkelgrößen. Insbesondere gilt $|\sphericalangle CJH| = |\sphericalangle AEI|$. Die Winkel $\sphericalangle CJH$ und $\sphericalangle HJB$ sind zueinander Nebenwinkel. Nach dem Nebenwinkelsatz folgt daher

$$|\sphericalangle HJB| = 180^\circ - |\sphericalangle CJH| = 180^\circ - |\sphericalangle AEI| = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ.$$

Das Fünfeck $BJHEI$ hat daher die Innenwinkelgrößen 90° , 155° , 90° , 90° und 115° .

Bemerkung: Statt in b) die Größe des Winkels $\sphericalangle CJH$ und dann über den Nebenwinkelsatz die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle HJB$ des Fünfecks $BJHEI$ zu berechnen, kann die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle HJB$ auch direkt mit den schon bekannten Größen der anderen vier Innenwinkel des Fünfecks $BJHEI$ berechnet werden. Die Summe aller fünf Innenwinkelgrößen jedes (konvexen) Fünfecks ist 540° . Daher gilt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle HJB| &= 540^\circ - |\sphericalangle EHJ| - |\sphericalangle IEH| - |\sphericalangle BIE| - |\sphericalangle JBI| \\ &= 540^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 115^\circ - 90^\circ = 155^\circ. \end{aligned}$$

Erste Lösung: Wir betrachten zuerst ein Kalenderjahr, das kein Schaltjahr ist und bei dem der 31. Januar ein Montag ist. Der 31. März ist dann $(28 + 31 =) 8 \cdot 7 + 3$ Tage nach dem 31. Januar, also 3 Tage nach Montag und somit ein Donnerstag. Der 31. Mai ist $(30 + 31 =) 8 \cdot 7 + 5$ Tage nach dem 31. März, also 5 Tage nach Donnerstag und folglich ein Dienstag. Der 31. Juli ist $(30 + 31 =) 8 \cdot 7 + 5$ Tage nach dem 31. Mai, also 5 Tage nach Dienstag und folglich ein Sonntag. Der 31. August ist $28 + 3$ Tage nach dem 31. Juli, also 3 Tage nach Sonntag und folglich ein Mittwoch. Der 31. Oktober ist $(30 + 31 =) 8 \cdot 7 + 5$ Tage nach dem 31. August, also 5 Tage nach Mittwoch und folglich ein Montag. Der 31. Dezember ist $(30 + 31 =) 8 \cdot 7 + 5$ Tage nach dem 31. Oktober, also 5 Tage nach Montag und folglich ein Samstag. Die Abfolge der Wochentage der 31. Tage der Monate ist also Montag, Donnerstag, Dienstag, Sonntag, Mittwoch, Montag, Samstag. In diesem Jahr gibt es daher genau einen Wochentag, nämlich Freitag, der nicht der 31. Tag eines Monats ist.

Das Kalenderjahr sei nun ein Schaltjahr, bei dem der 31. Januar ein Montag ist. Da dann der Februar genau einen Tag mehr hat und alle anderen Monate unveränderte Länge haben, verschieben sich die Wochentage ab März um genau einen Tag. Die Abfolge der Wochentage der 31. Tage der Monate ist dann also Montag, Freitag, Mittwoch, Montag, Donnerstag, Dienstag, Sonntag. In diesem Jahr gibt es daher genau einen Wochentag, nämlich Samstag, der nicht der 31. Tag eines Monats ist.

Wir betrachten nun ein beliebiges Kalenderjahr, bei dem der 31. Januar kein Montag ist. Es sei n die Anzahl der Tage, die der 31. Januar nach dem davor liegenden Montag liegt. Um eben diese n Tage sind dann aber auch alle Wochentage der 31. Tage der Monate verschoben. Damit gibt es auch in diesem Jahr genau einen Wochentag, der nie der 31. Tag eines Monats dieses Kalenderjahres ist, nämlich der um n Tage verschobene Freitag, wenn es kein Schaltjahr ist, und der um n Tage verschobene Samstag, wenn es ein Schaltjahr ist.

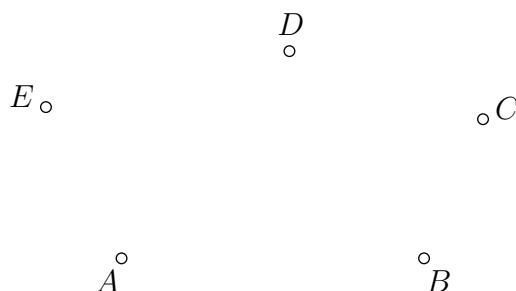
Daher gibt es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag, der nicht der 31. Tag eines Monats ist.

Zweite Lösung: Das Jahr 2025 ist kein Schaltjahr. Laut Kalender sind der 31. Januar ein Freitag, der 31. März ein Montag, der 31. Mai ein Samstag, der 31. Juli ein Donnerstag, der 31. August ein Sonntag, der 31. Oktober ein Freitag und der 31. Dezember ein Mittwoch. In diesem Kalenderjahr ist der 31. Tag eines Monats nie Dienstag. Bei jedem anderen Kalenderjahr, welches kein Schaltjahr ist, ist der Wochentag des 31. um eine bestimmte Anzahl n an Tagen im Vergleich zum Wochentag des 31. Januar 2025 verschoben. Um eben diese Anzahl n sind dann aber auch die anderen 31. Tage der Monate verschoben, weswegen es auch in einem solchen Jahr genau einen Wochentag gibt, der nie ein 31. Tag eines Monats ist.

Das nächste Schaltjahr ist das Jahr 2028. Laut Kalender sind dort der 31. Januar ein Montag, der 31. März ein Freitag, der 31. Mai ein Mittwoch, der 31. Juli ein Montag, der 31. August ein Donnerstag, der 31. Oktober ein Dienstag und der 31. Dezember ein Sonntag. In diesem Kalenderjahr ist der 31. Tag eines Monats nie Samstag. Bei jedem anderen Kalenderjahr, welches ein Schaltjahr ist, ist der Wochentag des 31. Januar um eine bestimmte Anzahl m an Tagen im Vergleich zum Wochentag des 31. Januar 2028 verschoben. Um eben diese Anzahl m sind dann aber auch die anderen 31. Tage der Monate verschoben, weswegen es auch in einem solchen Jahr genau einen Wochentag gibt, der nie ein 31. Tag eines Monats ist.

Folglich gibt es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag, der nicht der 31. Tag eines Monats ist.

Erste Lösung: Teil a)



Teil b) Da keine drei der Punkte auf einer Geraden liegen, sind auch je zwei dieser fünf Punkte verschieden.

Da jede Gerade durch die Angabe von zwei verschiedenen Punkten auf ihr eindeutig bestimmt ist, gibt es nur die 10 Geraden AB , AC , AD , AE , BC , BD , BE , CD , CE und DE durch je zwei der fünf Punkte A , B , C , D und E . Keine zwei dieser Geraden sind gleich, da andernfalls entgegen der Voraussetzung drei der fünf Punkte auf einer Geraden liegen. Folglich ist 10 die Anzahl aller Geraden, die jeweils genau zwei dieser fünf Punkte enthalten.

Lösungsvariante: Wie zuvor stellen wir fest, dass je zwei dieser fünf Punkte verschieden sind, es also genau 5 paarweise verschiedene Punkte sind. Für jede der Geraden durch je zwei verschiedene Punkte dieser fünf Punkte sind zwei verschiedene Punkte aus den fünf Punkten ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen. Die Anzahl dieser Auswahlen ist $\frac{5 \cdot 4}{2}$, also 10. Keine zwei der so gebildeten Geraden sind gleich, da andernfalls drei dieser fünf Punkte entgegen der Voraussetzung auf einer Geraden liegen.

Folglich ist 10 die Anzahl aller Geraden, die jeweils genau zwei dieser fünf Punkte enthalten.

Teil c) Wie zuvor stellen wir fest, dass es genau 5 paarweise verschiedene Punkte sind. Da Dreiecke zu bilden sind, deren drei Ecken genau drei dieser fünf Punkte sind, sind für jedes Dreieck genau 3 der gegebenen 5 Punkte als Eckpunkte auszuwählen und jedes dieser Dreiecke ist durch seine drei Eckpunkte eindeutig bestimmt. Daher gibt es nur die Dreiecke mit den Eckpunkten A , B und C , den Eckpunkten A , B und D , den Eckpunkten A , B und E , den Eckpunkten A , C und D , den Eckpunkten A , C und E , den Eckpunkten A , D und E , den Eckpunkten B , C und D , den Eckpunkten B , C und E , den Eckpunkten B , D und E , sowie den Eckpunkten C , D und E .

Die Anzahl aller Dreiecke, deren Eckpunkte jeweils genau drei der fünf Punkte sind, ist also 10.

Lösungsvariante: Für jedes Dreieck sind jeweils genau drei der fünf Punkte als Eckpunkte oder umgekehrt genau zwei Punkte auszuwählen, die nicht Eckpunkt des Dreiecks sind. Zwei dieser Dreiecke sind genau dann gleich, wenn sie in ihren drei Eckpunkten übereinstimmen. Daher ist die Anzahl aller Dreiecke, deren Eckpunkte genau drei der fünf Punkte sind, gleich der Anzahl aller Auswahlen von zwei verschiedenen Punkten dieser fünf Punkte ohne Beachtung der Reihenfolge, also 10.

Teil d) Es werden zehn Punkte betrachtet, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Da keine drei der Punkte auf einer Geraden liegen, sind auch je zwei dieser zehn Punkte

verschieden. Mit jeweils genau 3 dieser 10 Punkte als Eckpunkte sind Dreiecke zu bilden. Für die Bildung jedes dieser Dreiecke sind also jeweils genau 3 aus 10 Punkte ohne Beachtung der Reihenfolge als Eckpunkte auszuwählen. Die Anzahl aller Auswahlen von genau 3 aus genau 10 Punkten ohne Beachtung der Reihenfolge sei x . Zur Bestimmung von x nutzen wir die Methode des doppelten Abzählens, indem wir die Anzahl aller Auswahlen von genau 3 aus genau 10 Punkten mit Beachtung der Reihenfolge auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen bestimmen und damit x berechnen:

- (i) Man wählt den ersten Punkt (einen aus 10), dann den zweiten (einen aus 9) und dann den dritten (einen aus 8). Das sind genau $10 \cdot 9 \cdot 8$ Auswahlen von genau 3 aus genau 10 Punkten mit Beachtung der Reihenfolge.
- (ii) Man wählt zuerst alle 3 Punkte ohne Reihenfolge (gesuchte Anzahl x) und ordnet sie dann an: Man wählt den ersten Punkt (einen aus 3), dann den zweiten (einen aus 2) und dann den dritten (einen aus 1). Das sind genau $x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Auswahlen von genau 3 aus genau 10 Punkten mit Beachtung der Reihenfolge.

Daher gilt $10 \cdot 9 \cdot 8 = x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, also

$$x = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Folglich gibt es genau 120 Dreiecke, deren Ecken jeweils genau drei dieser 10 Punkte sind.

Lösungsvariante: Die gesuchte Anzahl x kann man auch durch doppeltes Abzählen aller Anordnungen von genau 10 Punkten bestimmen:

- (i) Man wählt den ersten Punkt (einen aus 10), dann den zweiten (einen aus 9), und dann den dritten (einen aus 8), ..., dann den zehnten (einen aus 1). Das sind genau $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen von genau 10 Punkten.
- (ii) Man wählt zuerst alle 3 Punkte ohne Reihenfolge (gesuchte Anzahl x), ordnet dann die ausgewählten drei Punkte (genau $3 \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen) an und ordnet dahinter die sieben nicht ausgewählten Punkte (genau $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen) an. Das sind genau $x \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$ Anordnungen von genau 10 Punkten.

Daher gilt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = x \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$, also

$$x = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120.$$

Bemerkungen: 1. Die Lösung der Aufgabenteile b) und c) kann auch durch systematisches Aufzählen aller Geraden von AB bis DE und aller (nicht-orientierten) Dreiecke von ABC bis CDE erfolgen.

2. Die Überlegungen in den Lösung zu b), c) und d) können wie folgt verallgemeinert werden: Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$, P_n die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) von n paarweise verschiedenen Objekten und C_k^n die Anzahl aller Kombinationen ohne Wiederholung von k aus n Objekten (das sind alle Auswahlen von k paarweise verschiedenen Objekten aus n paarweise verschiedenen Objekten ohne Beachtung der Reihenfolge). Die Anordnung von n Objekten erhält man, indem man k paarweise verschiedene Objekte aus den n Objekten auswählt, diese k Objekte anordnet und dahinter die nicht ausgewählten $n - k$ Objekte anordnet. Daher gilt

$$P_n = C_k^n \cdot P_k \cdot P_{n-k}.$$

Mit $m!$ als Produkt der Zahlen von 1 bis m und $0! = 1$ gilt $P_m = m!$ für jede natürliche Zahl m . Mit

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

folgt

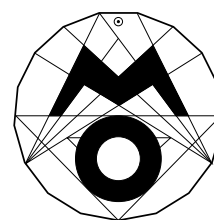
$$C_k^n = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

für natürliche Zahlen k und n mit $k \leq n$.

Die gesuchte Anzahl in b) ist C_2^5 mit $C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10$.

Die gesuchte Anzahl in c) ist C_3^5 mit $C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = C_2^5 = 10$.

Die gesuchte Anzahl in d) ist C_3^{10} mit $C_3^{10} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$.



650811 Lösung

8 Punkte

Um durch das Umgießen exakt abzumessen, müssen wir entweder das Gefäß, aus dem wir umgießen, vollständig entleeren oder das Gefäß, das wir befüllen, vollständig füllen.

In einer Tabelle geben wir vier Umgießschritte und die Wassermengen in den einzelnen Gefäßen nach dem jeweiligen Schritt an. Für bessere Übersichtlichkeit bezeichnen wir das 10-Liter-Gefäß als Gefäß A, das 5-Liter-Gefäß als Gefäß B und das 3-Liter-Gefäß als Gefäß C.

Schritt	Vorgang	Gefäß A (10 Liter)	Gefäß B (5 Liter)	Gefäß C (3 Liter)
Beginn		10 Liter	0 Liter	0 Liter
1. Schritt	C mittels A vollständig füllen	7 Liter	0 Liter	3 Liter
2. Schritt	C in B vollständig ausleeren	7 Liter	3 Liter	0 Liter
3. Schritt	C mittels A vollständig füllen	4 Liter	3 Liter	3 Liter
4. Schritt	B mittels C vollständig füllen	4 Liter	5 Liter	1 Liter

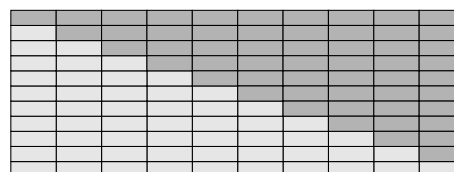
Nach diesen vier Schritten befindet sich in einem der Gefäße genau 1 Liter Wasser, nämlich in Gefäß C.

Damit ist bewiesen, dass die Behauptung der AG-Leiterin richtig ist.

650812 Lösung

10 Punkte

Teil a) Wir ergänzen das Ziegeldreieck mit einer Kopie des Ziegeldreiecks zu einem Rechteck, siehe Abbildung. Das Rechteck hat horizontal 10 Ziegel. Im linken Stapel sind es genau 10 Ziegel plus einem Ziegel aus der Kopie, also genau $(10 + 1 =)$ 11 Ziegel. Die anderen Stapel



haben ebenfalls 11 Ziegel, da es im Ziegeldreieck jeweils genau ein Ziegel weniger, bei der Kopie aber genau einer mehr wird. Das Rechteck besteht also aus $10 \cdot 11$ Ziegeln. Das Ziegeldreieck ist eine Hälfte des Rechtecks. Es hat folglich $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11$, also 55 Ziegel.

Da im Ziegeldreieck in der 10. Reihe genau 1 Ziegel, in der 9. Reihe genau 2 Ziegel, ..., in der 1. Reihe genau 10 Ziegel liegen, ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10 gleich der Anzahl an Ziegeln in diesem Dreieck, also ebenfalls $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 + 1)$, was auch die Gaußsche Summenformel ergibt.

Teil b) Nach der Gaußschen Summenformel ist $\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (1000 + 1)$, also 500 500, die hier gesuchte Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

Teil c) Wir berechnen zuerst die Summe S_2 aller geraden Zahlen von 1 bis 1000. Da jede dieser geraden Zahlen das Doppelte genau einer der natürlichen Zahlen von 1 bis 500 ist, gilt

nach der Gaußschen Summenformel

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot (1 + 500) = 500 \cdot 501 = 250\,500.$$

Die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 ist die Differenz aus der Summe S_1 aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 und der Summe aller geraden natürlichen Zahlen von 1 bis 1000. Nach b) gilt $S_1 = 500\,500$. Wegen

$$S_1 - S_2 = 500\,500 - 250\,500 = 250\,000$$

ist 250 000 folglich die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 1000.

Lösungsvariante: Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 sind es genau 500 ungerade Zahlen und genau 500 gerade Zahlen. Jede dieser geraden Zahlen ist der Nachfolger genau einer dieser ungeraden Zahlen, also um 1 größer als diese ungerade Zahl. Folglich ist die Summe aller geraden Zahlen im Bereich von 1 bis 1000 um genau $(500 \cdot 1 =)$ 500 größer als die Summe der ungeraden Zahlen in diesem Bereich. Nach b) ist daher $\frac{1}{2} \cdot (500\,500 - 500)$, also 250 000, die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 1000.

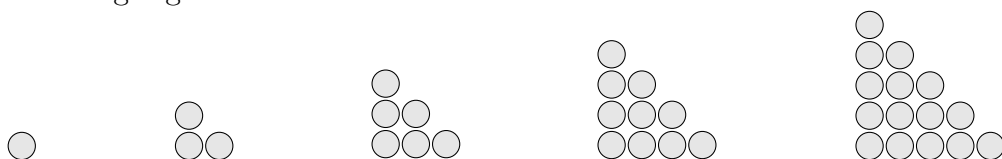
Teil d) Die Zahl 64 ist die größte durch 8 teilbare Zahl kleiner oder gleich 65. Die Zahl 2024 ist die größte durch 8 teilbare Zahl kleiner oder gleich 2025. Wegen $64 = 8 \cdot 8$ und $2024 = 253 \cdot 8$ erhält man die gesuchte Summe als $8 \cdot (S_2 - S_1)$, wobei S_2 die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 253 ist und S_1 die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 8 ist. Nach der Gaußschen Summenformel gelten

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 253 \cdot (253 + 1) = 253 \cdot 127 = 32\,131.$$

Wegen $8 \cdot (S_2 - S_1) = 8 \cdot (32\,131 - 36) = 256\,760$ ist daher 256 760 die Summe aller durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen zwischen 65 und 2025.

Bemerkungen: 1. Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) hat bereits in seiner Grundschulzeit herausgefunden, dass man für die Berechnung der Summe von aufeinanderfolgenden Zahlen nur die kleinste und die größte der Zahlen addieren muss, das Ergebnis mit der Anzahl der Zahlen multipliziert und schließlich dieses Ergebnis nur noch zu halbieren braucht. 2. In der Abbildung sind gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke zu sehen, die jeweils mit gleichgroßen Plättchen gelegt sind.



Die Anzahl der jeweiligen Plättchen heißt *Dreieckszahl*. Die erste bis fünfte Dreieckszahl sind daher 1, 3, 6, 10 und 15. Allgemein sieht man durch Anlegen einer Kopie des Dreiecks, dass die n -te Dreieckszahl gleich $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ ist. Andererseits ist die n -te Dreieckszahl auch die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n .

Verallgemeinerungen der Dreieckszahlen sind figurierte Zahlen. Zu den figurierten Zahlen gehören auch die *Quadratzahlen*. In der Abbildung sind Quadrate zu sehen, die jeweils mit gleichgroßen Plättchen gelegt sind.



Die n -te Quadratzahl ist n^2 . Man sieht, dass die Anzahl der Plättchen, die beim n -ten Quadrat im Vergleich zum vorherigen Quadrat hinzukommen, die n -te ungerade Zahl ist. Daher ist die n -te Quadratzahl n^2 gleich der Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis zur n -ten ungeraden Zahl. In Teil c) war die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis 999 zu berechnen. Da 999 die 500. ungerade Zahl ist, ist diese Summe gleich der 500. Quadratzahl, also gleich 500^2 .

650813 Lösung

10 Punkte

Für jede natürliche Zahl k mit $1 \leq k \leq 65$ werden im k -ten Schritt genau diejenigen Karten umgedreht, deren Nummern durch k teilbar sind. Am Ende liegen nur diejenigen Karten mit der Rückseite nach oben, deren Nummern eine ungerade Anzahl an positiven Teilern haben.

Es seien n die Nummer einer Karte, also eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 65$, und k ein positiver Teiler von n . Die Karte mit der Nummer n wird also im k -ten Schritt umgedreht. Sie wird außerdem im $\frac{n}{k}$ -ten Schritt umgedreht, da wegen $n = k \cdot \frac{n}{k}$ auch $\frac{n}{k}$ ein Teiler von n ist. Die positiven Teiler von n lassen sich so zu Paaren der Form $(k, \frac{n}{k})$ mit $k \leq \frac{n}{k}$ gruppieren. Dabei gilt $k = \frac{n}{k}$ genau dann, wenn $n = k^2$ gilt, und dieser Fall tritt genau dann auf, wenn n eine Quadratzahl ist. Im Fall $n = k^2$ enthält das Paar $(k, \frac{n}{k})$ folglich nur zwei gleiche positive Teiler von n , ansonsten enthalten alle diese Paare zwei verschiedene positive Teiler.

Daher hat eine natürliche Zahl genau dann eine ungerade Anzahl an positiven Teilern, wenn sie eine Quadratzahl ist. Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 65 sind nur die Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 und 64 Quadratzahlen. Folglich liegen am Ende nur die Karten mit den Nummern 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 und 64 mit der Rückseite nach oben.

Bemerkung: Dass die Anzahl der positiven Teiler einer natürlichen Zahl n genau dann ungerade ist, wenn n eine Quadratzahl ist, kann man auch beweisen, indem man die Anzahl an positiven Teilern von n ermittelt: Für $n = 1$ ist die Aussage wahr, da 1 eine Quadratzahl ist und sie nur einen Teiler hat, nämlich 1. Für $n > 1$ betrachten wir die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_m^{e_m}$ von n . Für jedes i von 1 bis m hat die Primfaktorpotenz $p_i^{e_i}$ als positive Teiler nur die Potenzen p_i^0 bis $p_i^{e_i}$, also genau $e_i + 1$ positive Teiler. Jeder positive Teiler von n ist nun wiederum eindeutig darstellbar als Produkt von jeweils einem positiven Teiler der Primfaktorpotenzen $p_1^{e_1}$ bis $p_m^{e_m}$ von n . Folglich ist $(e_1 + 1) \cdot \dots \cdot (e_m + 1)$ die Anzahl der positiven Teiler von n . Sie ist genau dann ungerade, wenn jeder der Faktoren $e_i + 1$ mit i von 1 bis m ungerade ist, also jede der Zahlen e_i von 1 bis m eine gerade Zahl ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn n eine Quadratzahl ist.

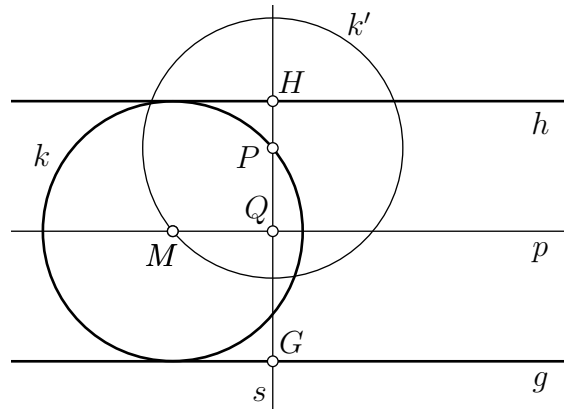
650814 Lösung

12 Punkte

Teil a) Eine Konstruktionsbeschreibung zur Konstruktion eines solchen Kreises k ist:

- (K1) Konstruiere die Senkrechte s zur Geraden g durch den Punkt P .
- (K2) Konstruiere den Schnittpunkt G der Geraden g und s sowie den Schnittpunkt H der Geraden h und s .
- (K3) Konstruiere den Mittelpunkt Q der Strecke $\overline{GH}$.
- (K4) Konstruiere die Parallele p zur Geraden g durch den Punkt Q .
- (K5) Konstruiere den Kreis k' mit Mittelpunkt P und Radiuslänge $|\overline{GQ}|$.
- (K6) Konstruiere einen Schnittpunkt M von k' und p .
- (K7) Konstruiere den Kreis k mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt P .

Teil b) Für die Zeichnung mit Beschriftungen siehe die Abbildung.



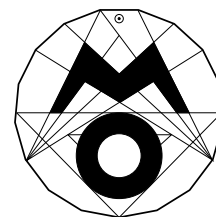
Teil c) Der Kreis k sei wie in Teil a) beschrieben konstruiert.

Da g und h parallel zueinander sind, ist die nach den Schritten (K1), (K2), (K3) und (K4) konstruierte Parallele p zu g auch eine Parallele zu h . Nach den Schritten (K1), (K2), (K3) ist $|\overline{GQ}|$ der halbe Abstand der Geraden g und h und nach (K4) daher der Abstand von p zu g und von p zu h .

Nach (K5), (K6) hat der Punkt M vom Punkt P den Abstand $|\overline{GQ}|$. Nach (K7) verläuft der Kreis k durch den Punkt P und hat die Radiuslänge $|\overline{GQ}|$. Da diese Radiuslänge gleich dem Abstand des Punktes M zu den Geraden g und h ist, berührt der Kreis k die Geraden g und h .

Der nach der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) konstruierte Kreis k erfüllt also tatsächlich die Forderungen.

Bemerkung: Zu je zwei voneinander verschiedenen, zueinander parallelen Geraden g und h sowie jeden Punkt P zwischen ihnen gibt es genau zwei Kreise durch P , die g und h berühren. Beide Kreise können nach obiger Konstruktionsbeschreibung konstruiert werden, indem beide Schnittpunkte von k' und p verwendet werden.



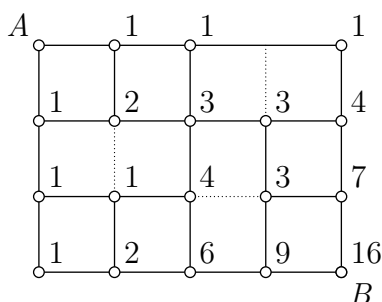
651011 Lösung

10 Punkte

Die kürzesten Wege in den Aufgaben a) und b) führen von einem Kreuzungspunkt entweder nach rechts oder nach unten. Wir notieren an jedem Kreuzungspunkt, wie viele kürzeste Wege von A aus zu diesem Punkt führen. Hat ein Kreuzungspunkt einen oberen und einen linken Nachbarn, so ergibt sich die Anzahl der kürzesten Wege zu diesem Kreuzungspunkt aus der Summe der Anzahlen der kürzesten Wege zu diesen beiden Nachbarn, da die kürzesten Wege über genau einen Nachbarn gehen und Wege über verschiedene Nachbarn verschieden sind.

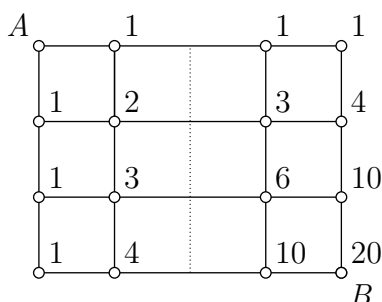
Teil a) Es gibt 3 kürzeste Wege von A nach G und 4 von A nach H . Kürzt man eine Wegstrecke nach rechts mit r und die nach unten mit u ab, so kann man die drei Wege von A nach G mit rru , rru und urr abkürzen. Die kürzesten Wege von A nach H lauten dann $rruu$, $ruru$, $urru$ und $uurr$.

Teil b)

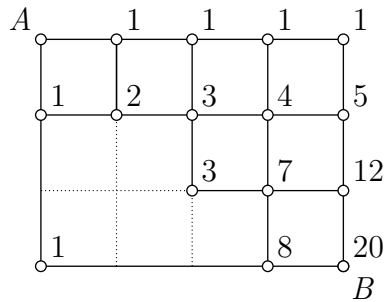


Es gibt also 16 kürzeste Wege von A nach B .

Teil c) Zum Beispiel:



L 651011 c1



L 651011 c2

Es gibt 20 kürzeste Wege von A nach B .

Hinweis: Auch das vollständige 3 mal 3 Quadratgitter ist eine Lösung, denn es ist äquivalent zur Lösung in Abbildung L 651011 c1. Außerdem kann man in c) natürlich auch eine triviale Lösung – wie ein 19×1 - oder ein 1×19 -Rechteck – angeben.

651012 Lösung

10 Punkte

Teil a) $(1, 8)$, $(8, 1)$, $(4, 7)$ und $(7, 4)$ sind Lösungen, denn $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$. (Die Summanden kann man vertauschen.) Die Lösungen findet man durch systematisches Probieren, indem man untersucht, ob sich für $65 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 8$ eine Quadratzahl ergibt.

Teil b) $(4, 18)$, $(18, 4)$, $(12, 14)$ und $(14, 12)$ sind Lösungen, denn $4^2 + 18^2 = 12^2 + 14^2 = 340$. Die Lösungen findet man auch hier durch systematisches Probieren, indem man untersucht, ob sich für $340 - b^2$ mit $b = 1, 2, \dots, 18$ eine Quadratzahl ergibt.

Teil c) Wir verwenden im Weiteren mehrfach die folgende Alternative:

- (1) Sind a und b beide gerade, so ist $a^2 + b^2$ durch 4 teilbar.
- (2) Ist von a und b eine Zahl gerade und die andere ungerade, so lässt $a^2 + b^2$ bei Division durch 4 den Rest 1.
- (3) Sind a und b beide ungerade, so lässt $a^2 + b^2$ bei Division durch 4 den Rest 2.

Da 8024 durch 4 teilbar ist, müssen für eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ in ganzen Zahlen beide Zahlen gerade sein. Es muss also ganze Zahlen m und n mit $a = 2m$, $b = 2n$ und $m^2 + n^2 = 8024 : 4 = 2006$ geben.

Da 2006 bei Division durch 4 den Rest 2 lässt, müssen für eine Lösung der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$ in ganzen Zahlen beide Zahlen ungerade sein und sich als $m = 2u + 1$ und $n = 2v + 1$ mit den ganzen Zahlen u und v darstellen lassen. Dann folgt $(2u + 1)^2 + (2v + 1)^2 = 2006$. Daraus ergibt sich durch Umformungen

$$\begin{aligned} 4u^2 + 4u + 1 + 4v^2 + 4v + 1 &= 2006, \\ 4u^2 + 4u + 4v^2 + 4v &= 2004, \\ u^2 + u + v^2 + v &= u(u + 1) + v(v + 1) = 501. \end{aligned}$$

Nun sind sowohl $u(u + 1)$ als auch $v(v + 1)$ gerade Zahlen, weil eine von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gerade ist. Dann ist aber auch die Summe $u(u + 1) + v(v + 1)$ gerade und kann nicht gleich 501 sein. Es gibt also keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $m^2 + n^2 = 2006$, damit auch keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ und folglich erst recht nicht in positiven ganzen Zahlen.

Anmerkung: Alternativ kann man verwenden, dass die Quadrate der ungeraden Zahlen m und n bei Division durch 8 den Rest 1 lassen, $m^2 + n^2$ also den Rest 2. Die Zahl 2006 lässt aber den Rest 6 bei Division durch 8.

651013 Lösung

10 Punkte

Teil a) Die Bestimmung der Summe aller Unbekannten $a + b + c + d$ ist hier durch die besondere Struktur der Terme in den Ausgangsgleichungen möglich. Falls es eine Lösung gibt, muss für diese die Summe der linken Seiten der vier Gleichungen gleich der Summe der rechten Seiten sein. Durch die entsprechende Addition der Gleichungen (1) bis (4) erhalten wir

$$3 \cdot (a + b + c + d) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

daher ist $a + b + c + d = \frac{10}{3}$. Damit erhalten wir

$$d = a + b + c + d - (a + b + c) = \frac{10}{3} - 1 = \frac{7}{3}$$

sowie

$$a = a + b + c + d - (b + c + d) = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$

Auf vollkommen analoge Weise erhalten $b = \frac{1}{3}$ und $c = -\frac{2}{3}$. Die Probe anhand der vier Gleichungen zeigt, dass wir mit

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

tatsächlich die einzige Lösung des Gleichungssystems ermittelt haben.

Teil b) Hier ergibt sich aus der Gleichheit der Summen der linken und der rechten Seiten der vier Gleichungen, dass für jede Lösung

$$2 \cdot (a + b + c + d) = 1 \quad \text{und damit} \quad a + b + c + d = \frac{1}{2},$$

gelten muss. Addiert man (1) und (3), so erhält man jedoch

$$a + b + c + d = 0.$$

Also ergibt sich der Widerspruch $\frac{1}{2} = 0$. Die Annahme, dass es eine Lösung gibt, war also falsch: Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Teil c) Die Probe anhand der sechs Gleichungen zeigt, dass

$$(a, b, c, d, e, f) = (0, 1, -1, 0, 1, -1)$$

tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems ist. Aber auch

$$(a, b, c, d, e, f) = (1, 2, -3, 1, 2, -3)$$

ist eine Lösung, wie die Probe zeigt.

Die Aufgabenstellung verlangt nicht, dass – wie im Folgenden – alle Lösungen des Gleichungssystems gefunden werden.

Falls es eine Lösung gibt, folgt aus den Gleichungen (1) und (6), dass $c = f$ gilt. Mithilfe der Gleichungen (2) und (3) können wir analog auf $b = e$ schließen, und schließlich erhalten wir aus (4) und (5), dass $a = d$ gilt. Wendet man in den sechs Gleichungen diese Beziehungen an,

indem wir a, b, c durch die entsprechenden Variablen ersetzen, dann erhalten wir eine einzige Gleichung: $d + e + f = 0$. Hier kann man zwei Variablen frei wählen, zum Beispiel d und e . Dann ist $f = -d - e$ und weiterhin $a = d$, $b = e$ sowie $c = -d - e$. Das Einsetzen dieser Terme in die sechs Ausgangsgleichungen zeigt, dass

$$(a, b, c, d, e, f) = (d, e, -d - e, d, e, -d - e) \quad (7)$$

tatsächlich eine Lösung des Systems ist. Es gibt also unendlich viele Lösungen, die durch die Gleichung (7) parametrisiert werden.

651014 Lösung

10 Punkte

Teil a) Es gibt $(16 \cdot 15) : 2$ Möglichkeiten, aus den Zahlen von 2025 bis 2040 zwei (verschiedene) Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) zu ziehen. Für die erste Zahl gibt es 16 Möglichkeiten, denn wir wählen aus $2040 - 2024 = 16$ Zahlen zufällig aus. Für die zweite Zahl gibt es dann 15 Möglichkeiten. Insgesamt sind es damit $16 \cdot 15$ Möglichkeiten. Dabei wurde jedoch jede Möglichkeit doppelt gezählt (erst a , dann b führt zur gleichen Auswahl wie erst b und danach a), daher sind es $(16 \cdot 15) : 2 = 120$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

Sei a die größere der beiden gewählten Zahlen, b die kleinere. Wir zählen die Anzahl der Möglichkeiten, bei denen $a - b$ durch 6 teilbar ist. Wenn 6 Teiler von $a - b$ ist, dann gilt hier entweder $a - b = 6$ oder $a - b = 12$, weil wir 16 aufeinanderfolgende Zahlen haben. Für $a - b = 6$ gibt es die Möglichkeiten $2031 - 2025$, $2032 - 2026$ usw. bis $2040 - 2034$, also insgesamt 10 Möglichkeiten. Für $a - b = 12$ sind es die Möglichkeiten $2037 - 2025$, $2038 - 2026$, $2039 - 2027$ und $2040 - 2028$, also 4 weitere und deshalb insgesamt 14 Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass $a - b$ den Teiler 6 hat, ist somit $\frac{14}{120} = \frac{7}{60}$.

Hinweis: Die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Zahlen mit einem Griff aus der gegebenen Menge zu ziehen, kann auch mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{16}{2}$ berechnet werden.

Teil b) Wir berechnen die Anzahl der Möglichkeiten, aus der gegebenen Menge von 16 verschiedenen Zahlen genau drei mit einem Griff auszuwählen. Für die erste Zahl gibt es 16, für die zweite 15, für die dritte 14 Möglichkeiten. Damit sind es insgesamt $16 \cdot 15 \cdot 14$ Möglichkeiten. Diese Anzahl muss nun noch durch die Anzahl der möglichen Vertauschungen von drei Elementen, nämlich $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$, geteilt werden (die Elemente a, b, c können auf sechs Arten permutiert werden: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$). Daher gibt es insgesamt $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$ Möglichkeiten.

Die größtmögliche Summe von drei verschiedenen Zahlen aus der gegebenen Menge beträgt $2038 + 2039 + 2040 = 6117$. Einen Summenwert von 6116 kann man nur erreichen, indem der Summand 2038 durch 2037 ersetzt wird. Damit hat man genau zwei günstige Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der drei Zahlen mindestens 6116 ist, beträgt $\frac{2}{560} = \frac{1}{280}$.

Hinweis: Die Anzahl der Möglichkeiten, drei Zahlen mit einem Griff aus der gegebenen Menge zu ziehen, kann auch mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{16}{3}$ berechnet werden.

651015 Lösung

10 Punkte

Teil a) Der Anstieg der Geraden durch die Punkte D und C beträgt $m_{DC} = \frac{6-2}{1-(-3)} = 1$.

Für einen rechten Winkel bei C muss der Anstieg der Geraden BC gleich -1 sein. Damit ergibt sich $m_{CB} = \frac{3-6}{b-1} = -1$, also $b = 4$.

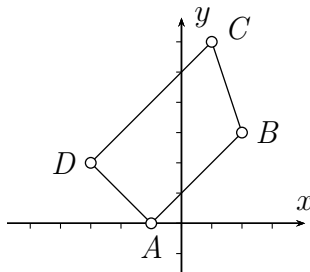
Teil b) Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Trapez, wenn wenigstens ein Paar paralleler Gegenseiten vorliegt. In jedem der Fälle müssen die entsprechenden Anstiege übereinstimmen. Für den Fall $DC \parallel AB$ ergibt sich $m_{DC} = m_{AB}$, also $\frac{6-2}{1-(-3)} = \frac{3-0}{b-(-1)}$, was genau für $b = 2$ erfüllt ist.

Für den Fall $AD \parallel BC$ erhält man $m_{AD} = m_{BC}$, also $\frac{2-0}{-3-(-1)} = \frac{6-3}{1-b}$, was genau für $b = 4$ erfüllt ist.

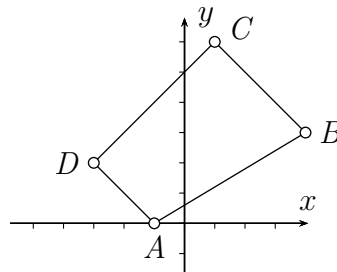
Somit ergeben sich genau für $b = 2$ oder $b = 4$ Trapeze, siehe Abbildung L 651015 a bzw. Abbildung L 651015 b.

Teil c) Das Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Gegenwinkel 180° beträgt. Da nun die Anstiege $m_{DC} = 1$ bzw. $m_{AD} = -1$ betragen, liegt in jedem Fall bei dem Eckpunkt D ein rechter Winkel vor. Damit muss schließlich auch bei B ein rechter Winkel vorliegen. Die Bedingung für die zugehörigen Anstiege lautet damit $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$, also $\frac{3-0}{b-(-1)} \cdot \frac{6-3}{1-b} = -1$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $(1-b)(b+1) = -9$ und damit $b^2 = 10$ gilt. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $b_1 = \sqrt{10}$ und $b_2 = -\sqrt{10}$.

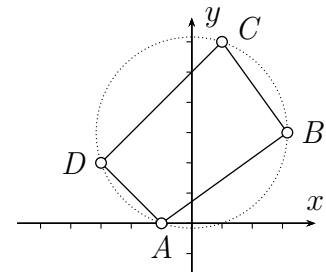
Wegen $b > -2$ bekommt man genau für $b = \sqrt{10}$ ein Sehnenviereck, siehe Abb. L 651015 c.



L 651015 a



L 651015 b

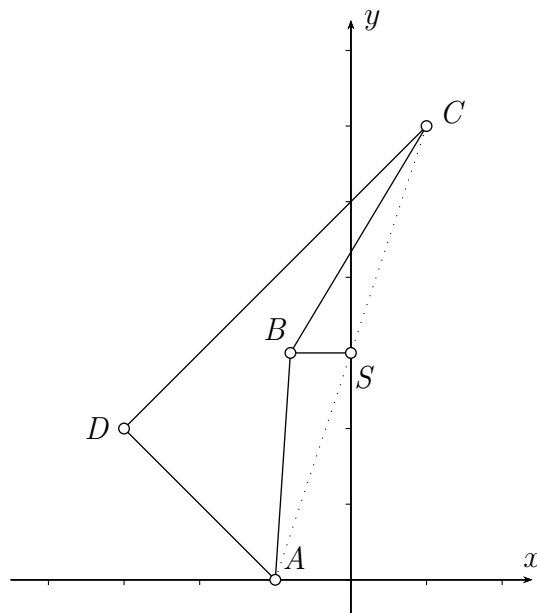


L 651015 c

Teil d) Wie oben berechnet ist $m_{AD} = -1$ und $m_{CD} = 1$. Das Dreieck CDA ist also rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D . Sein Flächeninhalt

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DA}| \cdot |\overline{DC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8$$

ist größer als 5. Daher muss das gesuchte Viereck $ABCD$ konkav sein.



L 651015 d

B liegt auf der Parallelen zur x -Achse mit $y = 3$. $S(0, 3)$ ist der Schnittpunkt der Geraden AC mit dieser Parallelen. Da B links von S liegt, damit das Viereck $ABCD$ konkav ist, ist $b < 0$. Zur Berechnung des Flächeninhaltes des Vierecks $ABCD$ muss vom Inhalt des Dreiecks ACD noch der Inhalt der Dreiecke BSC und ASB subtrahiert werden. Beide Dreiecke haben eine Grundseite der Länge $|\overline{BS}| = -b$ und Höhen der Länge 3. Es gilt also

$$A_{BSC} + A_{ASB} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-b) \cdot 3 \right) = -3b$$

und weiter

$$A_{ABCD} = A_{ACD} - (A_{BSC} + A_{ASB}) = 8 + 3b.$$

Also ist $A_{ABCD} = 5$ mit $b > -2$ genau dann, wenn $5 = 8 + 3b$ gilt, wenn also $b = -1$ ist. $ABCD$ ist auch ein (positiv orientiertes) Viereck wie in Abbildung L651015d zu sehen, denn der Punkt $B(-1, 3)$ liegt unterhalb der Seite $\overline{CD}$, auf der $M(-1, 4)$ der Punkt mit der x -Koordinate $x = -1$ ist.

Genau für $b = -1$ erhalten wir also ein Viereck, dessen Flächeninhalt genau 5 beträgt.

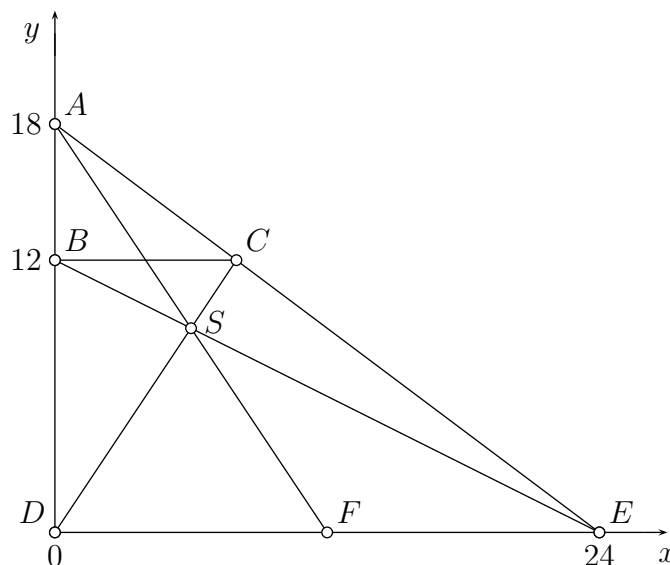
651016 Lösung

10 Punkte

Teil a) Die Gerade CD hat die Gleichung $y = \frac{12}{8} \cdot x = \frac{3}{2}x$ (siehe Abbildung) und die Gerade BE die Gleichung $y = -\frac{12}{24} \cdot x + 12 = -\frac{1}{2}x + 12$. Für die Berechnung der x -Koordinate des Schnittpunktes S beider Geraden werden deren Gleichungen gleichgesetzt und die entstehende Gleichung gelöst. Man erhält durch äquivalente Umformungen

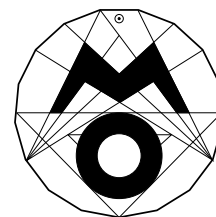
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x &= -\frac{1}{2}x + 12, \\ 2x &= 12, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Die y -Koordinate erhält man durch Einsetzen $y = -\frac{1}{2} \cdot 6 + 12 = 9$. Daraus ergibt sich $S(6, 9)$. Die Gerade AS hat daher die Gleichung $y = -\frac{9}{6} \cdot x + 18 = -\frac{3}{2}x + 18$, die den Schnittpunkt $F(12, 0)$ mit der x -Achse hat, denn $0 = -\frac{3}{2}x + 18$ gilt genau dann, wenn $x = 12$ ist. Daraus ergibt sich $|\overline{DF}| = |\overline{FE}| = 12$. Da die Dreiecke DFS und FES die gleiche Höhe zu den Grundseiten $\overline{DF}$ und $\overline{FE}$ haben, sind sie flächengleich. Der Flächeninhalt beträgt jeweils $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$.



Teil b) Das Dreieck DEC hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = 144$. Den Inhalt des Dreiecks CSE erhält man, wenn man davon die im Teil a) berechneten Inhalte der Dreiecke DFS und FES subtrahiert. Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also $144 - 54 - 54 = 36$.

Lösungsvariante: Das Dreieck SEC hat den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck BDS , denn wenn man an beide Dreiecke noch das Teildreieck BSC anfügt, hat man die flächengleichen Dreiecke BDC und BEC (gemeinsame Grundseite $\overline{BC}$ und gleiche Höhe 12). Der Inhalt von BDS lässt sich mit der Grundseite $|\overline{BD}|$ und der x -Koordinate von S als Höhe durch $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ berechnen.



651211 Lösung

10 Punkte

Die Summe der beiden ersten Ziffern ist nach Bedingung (2) gleich der Zahl, die die beiden letzten Ziffern bilden. Und diese ist nach Bedingung (1) zweistellig ohne die Ziffer 0. Also kann die Summe die Werte von 11 bis 18 annehmen.

Aufgrund der Bedingung (3) legt eine mögliche Wahl der ersten beiden Ziffern die mittleren Ziffern dann eindeutig fest, und zwar auf die um eins erhöhte Summe, einen Wert von 12 bis 19. Diese, und auch die Bedingung (3), müssen also zur Bestimmung der gesuchten Anzahl nicht weiter betrachtet werden.

Wenn die erste Ziffer den Wert 1 hat, ist die Summe 11 nicht zu erreichen.

Wenn die erste Ziffer den Wert 2 hat, kommt für die zweite Ziffer nur der Wert 9 in Frage.

Entsprechend können auf erste Ziffer 3 genau die Ziffern 8 oder 9 folgen.

Wächst nun die erste Ziffer um 1, dann kommt jeweils eine weitere mögliche Ziffer für die zweite Stelle hinzu.

Ist schließlich die erste Ziffer die 9, so sind die Ziffern 2, ..., 9 für die zweite Stelle möglich, also acht mögliche Ziffern.

Ergebnis: Damit gibt es insgesamt $1 + 2 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ sechstellige Zahlen, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung fragte zwar nur nach der Anzahl solcher Zahlen. Als Übersicht seien die 36 Zahlen hier aber dennoch einmal aufgelistet:

291211, 381211, 391312, 471211, 481312, 491413, 561211, 571312, 581413,
591514, 651211, 661312, 671413, 681514, 691615, 741211, 751312, 761413,
771514, 781615, 791716, 831211, 841312, 851413, 861514, 871615, 881716,
891817, 921211, 931312, 941413, 951514, 961615, 971716, 981817, 991918.

651212 Lösung

10 Punkte

Die vier Zahlen seien a, b, c, d in aufsteigender Reihenfolge: $0 < a \leq b \leq c \leq d$.

Wegen (1) sind die Zahlen ungerade, und es gilt $1 \leq a < b < c < d$.

Wegen (2) ist sogar $a \geq 3$ und $b \geq 5$.

Wegen (3) müssen $b-a, c-b, d-c$ eine streng monoton wachsende arithmetische Folge von drei positiven ganzen Zahlen bilden. Da a, b, c und d ungerade sind, sind diese Differenzen gerade. Weiterhin besagt die strenge Monotonie der Folge, dass $d - c > c - b > b - a$.

Mit $b - a > 0$ ergibt sich nun, dass $b - a \geq 2$ gilt. Aus $c - b > b - a$ folgt $c - b \geq 4$, und wegen $d - c > c - b$ gilt $d - c \geq 6$. Folglich muss $c = b + (c - b) \geq 5 + 4 = 9$ und $d = c + (d - c) \geq 9 + 6 = 15$ gelten.

Da alle Zahlen positiv sind, ist das Produkt $abcd$ der vier Zahlen eine monoton wachsende Funktion in jeder der Variablen a, b, c oder d .

Also ist

$$abcd \geq 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 = 9 \cdot 15^2 = 9 \cdot 225 = 2250 - 225 = 2025. \quad (4)$$

Der kleinste Wert des Produkts der vier Zahlen kann also 2025 nicht unterschreiten.

Andererseits sind die Zahlen $a = 3, b = 5, c = 9$ und $d = 15$ positiv und ungerade. Dabei sind 3 und 5 tatsächlich Primzahlen. Die Bedingungen (1) und (2) sind somit erfüllt.

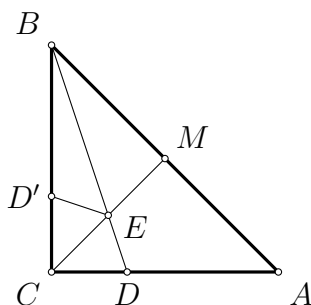
Mit diesen Werten ist $b - a = 2, c - b = 4 = 2 + 2, d - c = 6 = 4 + 2$ nicht nur streng monoton wachsend, sondern auch eine arithmetische Folge. Die Bedingung (3) ist also ebenfalls erfüllt. Das Produkt der vier Zahlen ist $abcd = 2025$.

Ergebnis: Wegen (4) ist damit 2025 als kleinstmöglicher Wert des Produkts nachgewiesen.

651213 Lösung

10 Punkte

Erste Lösung:



L 651213

Der Punkt D' sei der Spiegelpunkt des Punkts D an der Geraden MC , siehe Abbildung L 651213. Dann gelten $|\overline{CD}| = |\overline{CD'}| = 4$ und $A_{CDE} = A_{D'CE}$.

Da die Dreiecke BCE und $D'CE$ bezüglich der Seiten $\overline{BC}$ bzw. $\overline{D'C}$ dieselbe Höhe haben, gilt für ihre Flächeninhalte $A_{BCE} = (|\overline{BC}| / |\overline{D'C}|) A_{D'CE} = (12/4) A_{D'CE} = 3A_{D'CE}$ und daher auch

$$A_{BCE} = 3A_{CDE}.$$

Weiterhin ist $A_{BCE} + A_{CDE} = A_{BCD}$, also $A_{BCD} = 4A_{CDE}$ und somit

$$A_{CDE} = \frac{1}{4} A_{BCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{|\overline{CD}| \cdot |\overline{CB}|}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 12}{2} = 6.$$

Andererseits ist $\overline{CM}$ die Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ im Dreieck ABC . Also haben die Dreiecke CAM und CMB jeweils den halben Flächeninhalt von $\triangle ABC$. Damit gilt insbesondere

$$A_{CAM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} = 36.$$

Schließlich ist

$$A_{DAME} = A_{CAM} - A_{CDE} = 36 - 6 = 30.$$

Ergebnis: Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 30.

Zweite Lösung:

Es wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt. Dabei sei der Eckpunkt C der Koordinatenursprung, und der Strahl $\overrightarrow{CA}$ durchlaufe die x -Achse in positiver Richtung. Die Eckpunkte des Dreiecks ABC haben dann die Koordinaten

$$A(12, 0), \quad B(0, 12) \quad \text{sowie} \quad C(0, 0).$$

Weiterhin sind die Punkte D und M durch

$$D(4, 0) \quad \text{und} \quad M(6, 6)$$

gegeben.

Somit wird die Gerade CM durch die Gleichung $y = x$ beschrieben und die Gerade BD durch $y = 12 - 3x$. Die Koordinaten des Schnittpunkts $E(x_E, y_E)$ beider Geraden sind also eine Lösung des linearen Gleichungssystems aus den beiden Geradengleichungen

$$\begin{aligned} y_E &= x_E, \\ y_E &= 12 - 3x_E. \end{aligned}$$

Es folgt $x_E = 12 - 3x_E$, also $4x_E = 12$ und $x_E = 3$ sowie $y_E = 3$. Damit hat E die Koordinaten

$$E(3, 3).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{DAME} &= A_{CAM} - A_{CDE} \\ &= \frac{12 \cdot 6}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} \\ &= 36 - 6 \\ &= 30, \end{aligned}$$

wenn man beachtet, dass nach den obigen Berechnungen das Dreieck CAM die Höhe 6 und das CDE die Höhe 3 über der Grundseite $\overline{CA}$ bzw. $\overline{CD}$ hat.

Man erhält also wiederum das folgende Ergebnis.

Ergebnis: Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 30.

Bemerkung: Es ist selbstverständlich auch eine andere Wahl des Koordinatenursprungs und der Koordinatenachsen möglich. Die hier getroffene Auswahl bietet gegenüber anderen Festlegungen allenfalls gewisse Rechenvorteile.

Erste Lösung: Teil a) An jeder Fehde ist ein Paar von Rittern beteiligt. Im folgenden wird angenommen, dass es unter den acht Rittern genau elf Fehden, also elf entsprechende Paare von Rittern, gibt. Sollte es weniger geben, dann werden einfach so viele beliebige Paare als scheinbare Fehden hinzugefügt, sodass die Gesamtzahl von 11 Fehden erreicht wird. Ist dann eine konfliktfreie Belegung möglich, so ist diese auch noch konfliktfrei, wenn die nachträglich hinzugefügten Fehden wieder entfernt werden.

Es sei R_1 der Ritter, der die meisten Fehden hat. Sollte es mehrere Ritter geben, die jeweils die höchste Anzahl an Fehden erreichen, dann wird irgendeiner davon als R_1 ausgewählt.

Zur Argumentation wird im Folgenden mehrfach das Schubfachprinzip genutzt. Für jede Fehde wird ein Schubfach eingerichtet. In jedes Schubfach werden zwei Karteikarten eingeordnet, die jeweils eine Eintragung enthalten. Die beiden Eintragungen im Schubfach sind die Namen der an der zugehörigen Fehde beteiligten Ritter.

Es gibt also zunächst elf Schubfächer und damit genau $2 \cdot 11 = 22$ Eintragungen. Angenommen, jeder Ritter wäre an maximal zwei Fehden beteiligt. Dann gibt es höchstens $2 \cdot 8 = 16$ Eintragungen in den Schubfächern. Da aber 22 Eintragungen vorgenommen wurden, ist die Annahme widersprüchlich und der Ritter R_1 an mindestens drei Fehden beteiligt. Es zieht nun R_1 in ein Einzelzimmer.

Dann verbleiben sieben Ritter mit höchstens acht Fehden, die sich vier Einzelzimmer und den Saal teilen müssen. Wie oben wird wieder angenommen, dass es genau acht Fehden gibt. Unter den sieben noch nicht untergebrachten Rittern sei R_2 einer mit den meisten Fehden. Da $2 \cdot 7 = 14 < 16 = 2 \cdot 8$ ist, hat nach dem Schubfachprinzip auch R_2 mindestens drei Fehden, die nach Einquartierung von R_2 in ein weiteres Einzelzimmer herausfallen.

Somit bleiben noch sechs Ritter mit höchstens fünf Fehden übrig. Es wird wieder angenommen, dass es genau fünf Fehden sind. Ist nun unter den sechs noch unterzubringenden Rittern R_3 einer mit den meisten Fehden, so hat R_3 wegen $1 \cdot 6 < 10 = 2 \cdot 5$ mindestens zwei Fehden. Er bezieht nun das dritte Einzelzimmer.

Es verbleiben fünf Ritter mit höchstens drei Fehden. Wieder wird die Anzahl der Fehden gegebenenfalls auf genau drei angehoben. Damit hat unter den fünf Rittern wieder einer, R_4 , mindestens zwei Fehden und verschwindet im vierten Einzelzimmer.

Es verbleiben vier Ritter mit insgesamt höchstens einer Fehde. Wenn es keine Fehde gibt, wird eine scheinbare Fehde hinzugefügt und nach erfolgter Zimmerbelegung wieder entfernt. Von den damit genau zwei verfehdeten Rittern wird einer, R_5 , ins letzte Einzelzimmer geschickt, und die restlichen drei Ritter können friedlich in den Saal einziehen.

Teil b) Um dies zu zeigen, wird ein Beispiel mit acht Rittern und zwölf Fehden unter diesen angegeben, bei dem keine konfliktfreie Zimmerbelegung gelingt.

Dies ist der Fall, wenn die acht Ritter in zwei Gruppen zu je vier Rittern zerfallen und innerhalb jeder Gruppe alle Ritter miteinander in Fehde liegen. Die Anzahl der Fehden ist damit genau $n = 2 \cdot \binom{4}{2} = 12$. Dann kann aus jeder Gruppe nur ein Ritter in den Saal ziehen, während die verbleibenden sechs Ritter Einzelzimmer benötigen, von denen aber nur fünf zur Verfügung stehen.

Zweite Lösung: Teil a) Es werden die Einzelzimmer nacheinander mit Rittern R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5 belegt und zwar in dieser Reihenfolge. Die Auswahl der Ritter erfolgt dabei nach folgender Regel:

Aus den insgesamt $r_k = 9 - k$ noch unterzubringenden Rittern mit höchstens n_k Fehden wird als R_k ein Ritter ausgewählt und in ein Einzelzimmer verwiesen, der an gleich vielen oder mehr Fehden beteiligt ist als jeder andere der r_k Ritter.

Damit reduziert sich die Anzahl der Ritter um eins, also $r_{k+1} = r_k - 1$, und die Anzahl der Fehden um die Anzahl f_k der Fehden unter den r_k Rittern, an denen R_k beteiligt ist, also $n_{k+1} = n_k - f_k$. Da an einer Fehde immer genau zwei Ritter beteiligt sind, ist wegen der Wahl von R_k dabei stets $f_k r_k \geq 2n_k$, also

$$f_k \geq 2n_k / r_k.$$

Am Anfang sind nach Voraussetzung der Teilaufgabe $r_1 = 8$ und $n_1 \leq 11$ und damit $f_1 \geq 2n_1/8 = n_1/4$. Nachdem R_1 sein Einzelzimmer bezogen hat, verbleiben $r_2 = 7$ Ritter mit

$$n_2 = n_1 - f_1 \leq n_1 - n_1/4 = 3n_1/4 \leq 33/4$$

Fehden. Da n_2 ganzzahlig ist, muss damit $n_2 \leq 8$ sein.

Wegen $r_2 = 7$ ist weiterhin $f_2 \geq 2n_2/7$ und somit $n_3 = n_2 - f_2 \leq 5n_2/7 \leq 40/7$ und bedingt durch die Ganzzahligkeit von n_3 sicher $n_3 \leq 5$.

Als Nächstes erhält man mit $r_3 = 6$ dann $f_3 \geq 2n_3/6 = n_3/3$ und $n_4 = n_3 - f_3 \leq 2n_3/3 \leq 10/3$, somit $n_4 \leq 3$.

Mit $r_4 = 5$ ergibt sich weiterhin $f_4 \geq 2n_4/5$ und $n_5 = n_4 - f_4 \leq 3n_4/5 \leq 9/5$, also $n_5 \leq 1$.

Im letzten Schritt ist $r_5 = 4$ und daher $f_5 \geq 2n_5/4 = n_5/2$, somit $n_6 = n_5 - f_5 \leq n_5/2 \leq 1/2$ und folglich $n_6 = 0$.

Nachdem nun alle Einzelzimmer belegt sind, verbleiben also $r_6 = 3$ Ritter mit $n_6 = 0$ Fehden, die konfliktfrei in den Saal ziehen können.

Teil b) Wie in der ersten Lösung erfolgt der Nachweis durch ein Beispiel.

Dritte Lösung: Teil a) Es wird zunächst ein schwächeres Ergebnis allgemein gezeigt:

Lemma: Es sei $g \geq 1$. Wenn es unter $g + 3$ Rittern höchstens $n = 2g - 1$ Fehden gibt, dann lassen die Ritter sich in g Einzelzimmern und einem Saal für drei Ritter konfliktfrei einquartieren.

Beweis des Lemmas: Es reicht, den Fall mit genau $n = 2g - 1$ Fehden zu betrachten. Sollte es weniger Fehden geben, so erfinde man unter den Paaren von Rittern, die nicht miteinander verfeindet sind, weitere Fehden, von denen diese selbst nichts wissen. Dies ist möglich, da für die Anzahl der Paare gilt

$$\binom{\bar{g} + 3}{2} = \frac{(\bar{g} + 3)(\bar{g} + 2)}{2} \geq \frac{(1 + 3)(\bar{g} + 2)}{2} = 2\bar{g} + 4 > 2\bar{g} - 1.$$

Für $g = 1$ gilt die Behauptung, denn dann ist $n = 1$. In diesem Fall wird ein Ritter des Konfliktpaares im einzigen Einzelzimmer einquartiert, und die anderen drei Ritter schlafen friedlich im Saal.

Es sei nun indirekt angenommen, das Lemma wäre falsch. Dann gibt es ein kleinstes $g = \bar{g}$, für das die Behauptung nicht gilt. Nach dem zuvor Festgestellten ist dann $\bar{g} \geq 2$; und für $g = \bar{g} - 1$ ist die Behauptung des Lemmas wahr.

An den $\bar{n} = 2\bar{g} - 1$ Fehden sind dann, naiv gezählt,

$$2\bar{n} = 2(2\bar{g} - 1) = 4\bar{g} - 2 = \bar{g} + 4 + (3\bar{g} - 6) \geq \bar{g} + 4$$

Ritter beteiligt. Die Anzahl der Ritter ist aber nur $\bar{g} + 3$. Mindestens einer der Ritter hat demnach zwei Fehden.

Wird dieser in einem Einzelzimmer untergebracht, so verbleiben $\bar{g} - 1$ Einzelzimmer und der Saal für die übrigen $(\bar{g} + 3) - 1 = \bar{g} + 2 = (\bar{g} - 1) + 3$ Ritter, unter denen höchstens noch

$$\bar{n} - 2 = (2\bar{g} - 1) - 2 = 2(\bar{g} - 1) - 1$$

Fehden bestehen. Da für $g = \bar{g} - 1$ die Behauptung des Lemmas gilt, gibt es eine zulässige Zimmerbelegung für diese $\bar{g} + 2$ Ritter in $\bar{g} - 1$ Einzelzimmer und den Saal.

Damit sind insgesamt alle $\bar{g} + 3$ Ritter konfliktfrei untergebracht im Widerspruch zur Annahme. Also kann es kein kleinstes $g = \bar{g}$ geben, für das eine Zimmerbelegung im Sinne des Lemmas nicht möglich ist; das Lemma ist damit bewiesen.

Eine direkte Anwendung des Lemmas für acht Ritter, also $g = 5$, ergibt $n = 9$, was zur Lösung der Aufgabe noch nicht hinreicht. Es muss somit schärfer abgeschätzt werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei dabei n maximal, also $n = 11$. Dann gibt es 22 Beteiligungen der acht Ritter an Fehden. Es werden zwei Fälle unterschieden.

Fall 1: Es gibt einen Ritter mit mindestens vier Fehden.

Dieser Streithahn bekommt ein Einzelzimmer. Es verbleiben sieben Ritter mit höchstens $11 - 4 = 7$ Fehden, die sich nach dem Lemma für $g = 4$ konfliktfrei aufteilen lassen.

Fall 2: Jeder Ritter hat höchstens drei Fehden.

Wegen $22 = 2 \cdot 8 + 6$ haben dann mindestens sechs Ritter genau drei Fehden. Da jeder von diesen nur drei Feinde hat, gibt es zwei Ritter mit je drei Fehden, die untereinander nicht im Streit liegen. Man gibt diesen je ein Einzelzimmer.

Dann vermindert sich die Anzahl der noch unterzubringenden Ritter um zwei und die Zahl der Fehden zwischen diesen um sechs, sodass nur noch sechs Ritter mit fünf Fehden zu versorgen sind. Dies ist nach dem Lemma mit $g = 3$ möglich. Also können auch in diesem Fall alle Ritter konfliktfrei einquartiert werden.

Die Fallunterscheidung ist vollständig und Teil a) somit gelöst.

Teil b) Wie in der ersten Lösung erfolgt der Nachweis durch ein Beispiel.