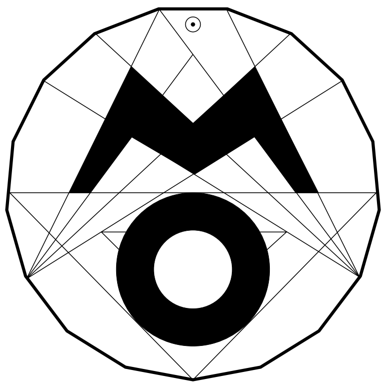


Olympiadeklasse

5

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630511

Anton, Bea, Clemens und Darius haben jeweils ein Haustier. In der Deutschstunde sollen sie ihre Haustiere beschreiben. Es wird von einem Hamster, von einem Wellensittich, von einer Schildkröte und sogar von einer Schlange berichtet. Jedes der Kinder hat eins dieser Tiere zu Hause.

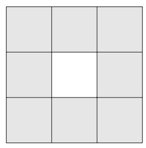
(1) Antons Haustier hat vier Beine.
(2) Clemens' Haustier hat keine Federn, sondern ein Fell.
(3) Beas Haustier kann nicht fliegen.

Ermittle, wer welches Haustier besitzt.

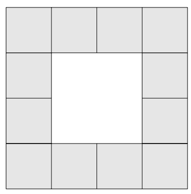
630512

Dana legt aus vielen gleichgroßen Papierquadraten größere Figuren, bei denen immer ganze Quadratseiten aneinander liegen, und sie klebt jeweils zwei nebeneinanderliegende Papierquadrate mit einem kleinen Klebestreifen zusammen.

a) Dana beginnt mit acht Quadraten und will sie zu einem 3×3-Quadrat zusammenfügen, bei dem das mittlere kleine Quadrat fehlt (siehe Abbildung).
Wie viele kleine Klebestreifen braucht sie?



b) Nun möchte Dana aus den kleinen Quadraten ein 4×4-Quadrat zusammenfügen, bei dem wiederum die kleinen Quadrate an den Seiten des großen Quadrats angeordnet sind (siehe Abbildung).
Wie viele kleine Klebestreifen braucht sie hier?



c) Nun fragt sich Dana, wie es weitergehen wird:
Wie viele kleine Klebestreifen werden benötigt, wenn man entsprechend ein 10×10-Quadrat zusammenfügen will? Beantworte Danas Frage.

d) Dana denkt weiter: „Bei dem 4×4-Quadrat habe ich zwölf kleine Quadrate verwendet. Was passiert, wenn ich diese 12 Quadrate anders anordne? Die Lücke in der Mitte muss ja nicht sein.
Wie viele Klebestreifen brauche ich mindestens?
Wie viele Klebestreifen brauche ich höchstens?“
Beantworte Danas Fragen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630513

Die Kinder einer 5. Klasse lernen ein Gedicht auswendig, das aus vier Strophen besteht.

In kleinen Gruppen tragen sie das Gedicht in der richtigen Reihenfolge der Strophen vor.

a) Die vier Kinder Anne, Britta, Chris und Daniel sollen jeweils eine Strophe aufsagen. Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die vier Kinder zu verteilen.

b) Jetzt sollen Emma und Felix je zwei Strophen vortragen. Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die vier Strophen auf die beiden Kinder zu verteilen.

c) Nun sind Gabriel, Hanna und Isabel beim Vortrag. Eines der drei Kinder soll dabei zwei Strophen hintereinander aufsagen, die anderen beiden jeweils eine Strophe. Ermittle wieder die Anzahl der Möglichkeiten.

Hinweis: Es ist sinnvoll, die Namen der Kinder durch den Anfangsbuchstaben abzukürzen.

630514

Jan spielt mit Zahlen. Alle Zahlen, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, nennt er JANZAHLEN.

a) Jan wählt die größte zweistellige JANZAHL, verdoppelt sie zuerst und dann verfünffacht er das erhaltene Ergebnis. Welche Zahl erhält er nun?

b) Ermittle die kleinste fünfstellige JANZAHL.

c) Jan subtrahiert von der größten dreistelligen JANZAHL die kleinste dreistellige JANZAHL. Welche Zahl erhält er nun?

d) Untersuche, ob mehr als die Hälfte der Zahlen von 100 bis 125 JANZAHLEN sind.

Olympiadeklasse **6**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

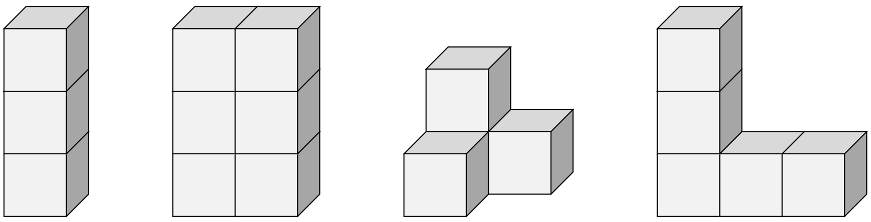
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630611

Meike hat viele gleichgroße Würfel. Alle diese Würfel sind oben und unten blau, links und rechts rot und vorne und hinten gelb. Meike baut daraus Körper auf einer Glasplatte, so dass sie sie auch von unten sehen kann. Dabei dreht sie keinen der verwendeten Würfel.

Die Körper werden von allen Seiten, also von vorn und von hinten, von links und von rechts, von oben und von unten betrachtet.

Zunächst erzeugt Meike die vier abgebildeten Körper (den Stab, das Paket, die Treppe und das L):



a) Gib für die vier abgebildeten Körper an, wie viele kleine blaue, rote und gelbe Quadratflächen jeweils von außen sichtbar sind.

b) Zeichne einen Körper, bei dem zwei gelbe Quadratflächen mehr als blaue und zwei blaue Quadratflächen mehr als rote von außen sichtbar sind.

c) Ermittle die kleinste Anzahl von Würfeln, die man braucht, um einen Körper gemäß b) zu bauen.

d) Lässt sich auch ein Körper bauen, bei dem nur eine blaue Quadratfläche mehr als rote Quadratflächen von außen zu sehen ist?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630612

Tina hat eine Spielzeug-Uhr, die nur einen Stundenzeiger besitzt. Sie dreht ihn jeweils nur um die gleiche Stundenanzahl weiter, das nennen wir Drehweite. Mit der Drehweite 5 kommt Tina zum Beispiel von 12 Uhr auf 5 Uhr, dann von 5 Uhr auf 10 Uhr usw.

Zunächst startet der Zeiger genau auf 12 Uhr. Tina fragt sich, bei welchen Drehweiten der Zeiger nach weniger als zwölf Drehungen wieder auf 12 Uhr stehen wird.

a) Untersuche, bei welchen der Drehweiten von 1 bis 6 dies der Fall ist.
b) Finde eine Drehweite im Bereich von 7 bis 11, für die das auch der Fall ist.

Nun startet Tina bei 1 Uhr.

c) Für welche Drehweiten von 1 bis 7 bleibt der Zeiger irgendwann bei 12 Uhr stehen?

630613

Die Kinder Anna, Bea, Carolin und Dana stellen sich in alphabetischer Reihenfolge ihrer Vornamen auf.

Dann sollen sie untereinander so Plätze tauschen, dass sie nach ihrer Körpergröße sortiert stehen, beginnend mit dem kleinsten Kind. Es zeigt sich, dass dafür nur zwei Kinder ihre Plätze tauschen müssen.

Als nächstes sollen die Kinder ihre Plätze tauschen, so dass sie nach ihrem Alter sortiert stehen, beginnend mit dem jüngsten Kind. Wieder müssen nur genau zwei Kinder ihren Platz tauschen, damit die Reihenfolge stimmt. Carolin ist übrigens das älteste Kind.

Nach den beiden Umsortierungen ist nur Bea am selben Platz wie zu Beginn.

a) Sortiere die Kinder nach ihrem Alter und zeige, dass nur diese Reihenfolge möglich ist.
b) Zeige, dass aus den Angaben **nicht** eindeutig ermittelt werden kann, welches Kind das größte ist.

630614

Franz und Xaver haben sich ein Zahlenspiel ausgedacht, das nach den folgenden Regeln funktioniert:

Arbeite die Schritte 1 bis 4 nacheinander ab. Wenn ein Schritt nicht ausführbar ist, gehe zum nächsten Schritt.

(1) Wähle dir eine natürliche Zahl.
(2) Wenn die Zahl gerade ist, tue Folgendes:
    Teile sie durch zwei.
    Wenn du bei 1 angekommen bist, höre auf, sonst:
    Gehe mit dem Ergebnis wieder zu Schritt 2.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

(3) Wenn die Zahl durch 3 teilbar ist, tue Folgendes:
  Teile sie durch 3.
  Wenn du bei 1 angekommen bist, höre auf, sonst:
  Gehe mit dem Ergebnis wieder zu Schritt 2.

(4) Addiere zu deiner Zahl 5 dazu.
  Gehe mit der neuen Zahl wieder zu Schritt 2.

Franz und Xaver spielen dieses Spiel mit etlichen Anfangszahlen.

„Komisch“, sagt Xaver, „ich glaube, die Reihen enden immer bei der 1.“

„Da bin ich mir nicht sicher“, antwortet Franz.

a) Führe dieses Spiel mit den Anfangszahlen von 9 bis 20 durch.

b) Offensichtlich kommst du bei manchen Startzahlen nie zur 1.
  Äußere eine Vermutung, welche Eigenschaft diese Zahlen haben.

Olympiadeklasse **7**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630711

Von einem Arzt, einem Biologen, einem Chemiker und einem Dachdecker ist bekannt, dass jeder genau einen der Namen Ehlers, Fink, Gröger und Helbig führt und jeder in genau einer der Städte Ingolstadt, Jena, Köln und Leipzig wohnt. Sie treffen sich bei einer Ausstellung. Weiter ist zu ihnen bekannt:

(1) Der Arzt wohnt in Köln.
(2) Herr Ehlers ist weder Chemiker noch Arzt.
(3) Herr Helbig und Herr Gröger lernten sich über den Chemiker kennen.
(4) Der Dachdecker wohnt in Jena und ist älter als der Herr aus Leipzig.
(5) Herr Helbig, der in Jena wohnt, korrespondiert mit Herrn Fink per E-Mail.
(6) Der Chemiker und der Herr aus Ingolstadt übernachten in verschiedenen Hotels.

Ermittle, welche Person welchen Beruf hat und in welcher Stadt die jeweilige Person wohnt.

630712

Eine Umkehrprimzahl ist eine Primzahl, deren Ziffern bei Aufschreiben in umgekehrter Reihenfolge wieder eine Primzahl ergeben.

Beispiele: Die Zahl 13 ist eine Umkehrprimzahl, da 13 und 31 Primzahlen sind. Die Zahl 157 ist eine Umkehrprimzahl, da 157 und 751 Primzahlen sind. Die Zahl 23 ist keine Umkehrprimzahl, da 32 keine Primzahl ist.

a) Gib alle Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 an.
b) Gib alle Umkehrprimzahlen kleiner als 102 an, die jeweils die Summe von genau drei paarweise verschiedenen Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 sind. Gib zu diesen Zahlen jeweils eine solche Summendarstellung an.
c) Begründe, dass es nicht möglich ist, aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 4 so auszuwählen, dass deren Summe eine Umkehrprimzahl ist.
d) Untersuche, ob man aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 5 paarweise verschiedene so auswählen kann, dass deren Summe eine zweistellige Umkehrprimzahl ist.

Hinweis: Paarweise verschieden heißen Zahlen, wenn keine zwei von ihnen gleich sind. So sind die drei Zahlen 1, 2 und 3 paarweise verschieden, die drei Zahlen 1, 2 und 2 aber nicht.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630713

Ben und Leon spielen ein Spiel mit Streichhölzern. Dazu entnehmen sie mehreren nichtleeren Streichholzschachteln alle Streichhölzer, zählen sie und legen sie auf einen Teller. Abwechselnd ziehen sie nun, wobei ein Zug aus dem Entnehmen von mindestens einem Streichholz, aber nicht mehr als der Hälfte der Streichhölzer vom Teller besteht, es sei denn, es liegt nur noch genau ein Streichholz auf dem Teller, dann darf dieses entnommen werden. Wer als Letzter ziehen kann, gewinnt.

a) Untersuche, ob das Spiel immer endet und es dabei immer einen Gewinner gibt.

b) Auf dem Teller liegen genau 120 Streichhölzer. Ben darf beginnen. Ben überlegt sich folgende Strategie:
   1. Bei meinem ersten Zug nehme ich genau 25 Streichhölzer weg.
   2. Wenn mehr als ein Streichholz auf dem Teller liegt und es nicht mein erster Zug ist, dann nehme ich genau so viele Streichhölzer weg, dass die Anzahl der auf dem Teller verbleibenden Streichhölzer genau die Hälfte der um 1 verringerten Anzahl an Streichhölzern ist, die nach meinem letzten Zug auf dem Teller lagen.
   3. Wenn genau ein Streichholz auf dem Teller liegt, dann entnehme ich dieses.

   Zeige, dass jeder von Bens Schritten regelkonform ist und dass Ben mit dieser Strategie bei allen regelkonformen Zügen von Leon immer gewinnt.

c) Untersuche, ob Ben seine Strategie so anpassen kann, dass er auch bei anderen Anzahlen von Streichhölzern in den vollen Streichholzschachteln immer gewinnt, wenn er beginnt.

Hinweis: Die in der Teilaufgabe b) beschriebene Strategie reagiert auf die Züge von Leon und lässt Ben bei allen regelkonformen Zügen von Leon gewinnen, wie zu zeigen ist. Eine solche Strategie nennt man *Gewinnstrategie*.

630714

Die Lage von vier Geraden in einer Ebene, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, kann durch die Anzahl ihrer Schnittpunkte unterschieden werden.

a) Gib die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten an, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige eine Zeichnung mit dieser Anzahl an Schnittpunkten an und begründe, warum mehr Schnittpunkte nicht möglich sind.

b) Finde alle weiteren möglichen Anzahlen von Schnittpunkten, die solche vier Geraden untereinander haben können. Fertige für jede dieser Anzahlen eine entsprechende Zeichnung an. Begründe, warum alle anderen Anzahlen nicht möglich sind.

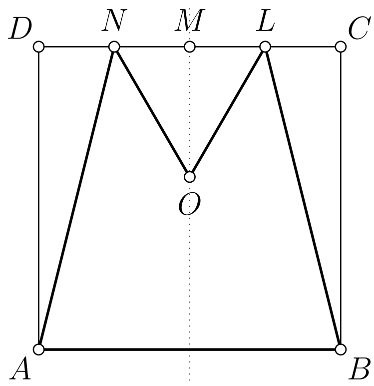
Olympiadeklasse 8

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

630811

Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge 4 cm. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$, der Punkt L ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ und der Punkt N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DM}$, siehe die nebenstehende Abbildung.



a) Der Punkt O liege so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $9\,\mathrm{cm}^2$ hat.

Berechne die Länge der Strecke $\overline{MO}$.

b) Untersuche, ob der Punkt O auch so auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Inneren des Quadrats $ABCD$ liegen kann, dass das Fünfeck $ABLON$ den Flächeninhalt $7\,\mathrm{cm}^2$ hat.

630812

Linda hat sich eine natürliche Zahl gedacht und anschließend in der Zifferndarstellung links eine 5 und rechts eine 8 angefügt. Dadurch hat sich die von Linda gedachte Zahl um 518 215 erhöht.

Finde die von Linda gedachte Zahl und begründe, warum sie eindeutig bestimmt ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

630813

Die beiden Tabellen sollen so mit Kreuzen $\times$ ausgefüllt werden, dass sie dann die folgenden Eigenschaften haben:

(1) In jeder Spalte und jeder Zeile stehen genau drei Kreuze.

(2) In keinem Feld mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer steht ein Kreuz.

(3) In einem Feld steht genau dann ein Kreuz, wenn auch im Feld mit vertauschter Zeilen- und Spaltennummer ein Kreuz steht.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Tabelle A 630813 a

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Tabelle A 630813 b

Gib jeweils eine so ausgefüllte Tabelle an oder begründe, warum sie nicht so ausgefüllt werden kann.

630814

Bestimme die Anzahl aller im Dezimalsystem sechsstelligen Zahlen, die durch 9 teilbar sind und die Ziffern 2, 0, 2, 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend enthalten.

Olympiadeklassen **9–10**

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

631011

a) Für die Zahl a gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl b

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111\,.$$

Berechnen Sie die Quersummen von a und b.

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl s betrachten wir nun die s-stellige natürliche Zahl k, deren Zifferndarstellung aus s Einsen besteht, also $k = \underbrace{1...1}_{s-\text{mal}}$, sowie die ebenfalls s-stellige natürliche Zahl $m = 4k = \underbrace{4...4}_{s-\text{mal}}$.

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von m durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl n; es sind also s verschiedene Werte für n möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl c mit

$$c = n^2 - m^2 + k\,.$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen c in Abhängigkeit von der Stellenzahl s annehmen können.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631012

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$\begin{aligned} g_1&:\ y = \frac{2}{9}\cdot x + \frac{5}{9}\,,\\ g_2&:\ y = \frac{7}{6}\cdot x - \frac{59}{6}\,,\\ g_3&:\ 7\cdot x - 6\cdot y = 8\,,\\ g_4&:\ 2\cdot x - 9\cdot y = -56\,. \end{aligned}$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

Hinweis: Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

631013

Von den Zahlen 2023, 2024 und 2025 ist die erste durch die Quadratzahl 289, die zweite durch die Quadratzahl 4 und die dritte durch die Quadratzahl 25 teilbar.

a) Geben Sie drei weitere Beispiele für jeweils drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
b) Zeigen Sie: Es gibt sogar unendlich viele Beispiele für drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
c) Finden Sie ein Beispiel mit vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

631014

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel vorkommt, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren.

Beispiel 1:

$$\sqrt{2x+1} = -7\,.$$

Es muss $x \geq -0{,}5$ sein, damit die Wurzel definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung führt zu $2x + 1 = 49$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = 24$. Setzt man diese Zahl in die Ausgangsgleichung ein, so stellt man fest, dass 24 keine Lösung ist.

Merke: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Es *kann* zu Scheinlösungen führen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Beispiel 2:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x-2}\,.$$

Es muss $x \geq 6$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind.

Wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert und umformt, dann erhält man

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-6}=2\,.$$

Erneutes Quadrieren führt zur quadratischen Gleichung $x^2-6x-4=0$ mit den Lösungen $x_1=3-\sqrt{13}$ und $x_2=3+\sqrt{13}$. Wegen $3-\sqrt{13}<0<6$ ist $\sqrt{x_i-6}$ jedoch nicht definiert; es handelt sich also um eine Scheinlösung. Auch für x_2 muss geprüft werden, ob es sich um eine Lösung handelt, denn wir haben nicht äquivalent umgeformt. Dabei genügt eine numerische Auswertung mit dem Taschenrechner nicht, da sich auf diese Weise niemals die exakte Gleichheit von

$$\sqrt{\sqrt{13}+3}+\sqrt{\sqrt{13}-3}=\sqrt{2\sqrt{13}+4}$$

zeigen lässt. Diese Gleichheit folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\sqrt{13}+3}+\sqrt{\sqrt{13}-3}\right)^2 &= \sqrt{13}+3+2\sqrt{\left(\sqrt{13}+3\right)\left(\sqrt{13}-3\right)}+\sqrt{13}-3\\ &= 2\sqrt{13}+2\sqrt{13-9}=2\sqrt{13}+4\end{aligned}$$

und der Aussage, dass für zwei Zahlen $A,B>0$ und $A=B$ auch $\sqrt{A}=\sqrt{B}$ gilt.

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-6}=\sqrt{2x-14}\,.$$

b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7}\,.$$

<u>631015</u>

a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$\left|\overline{AP}\right|+\left|\overline{BP}\right|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$\left|\overline{AP}\right|+\left|\overline{BP}\right|+\left|\overline{CP}\right|+\left|\overline{DP}\right|$$

minimal wird.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631016

a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

   Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

   Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?

Olympiadeklassen 11–12

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

631211

Für eine natürliche Zahl n sei $P(n)$ das Produkt ihrer von 0 verschiedenen Ziffern.

Beispielsweise ist also $P(2023) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Man ermittle, wie viele vierstellige Zahlen n mit der Eigenschaft $P(n) = 12$ existieren.

631212

Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

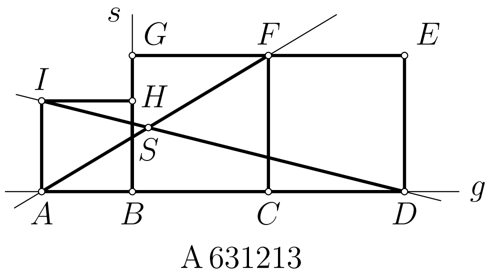
$$x + |y + 1| = 1\,, \tag{1}$$
$$y + |z + 2| = 1\,, \tag{2}$$
$$z + |x - 2| = 1 \tag{3}$$

im Bereich der reellen Zahlen.

631213

Die neun Punkte A, B, C, D, E, F, G, H und I bilden drei Quadrate $ABHI$, $BCFG$ und $CDEF$, wobei die vier Punkte A, B, C und D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g und G, H auf einem gemeinsamen Strahl s mit dem Anfangspunkt B liegen (siehe Abbildung A 631213). Die Geraden AF und DI schneiden sich im Punkt S.

Man ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ASD$.



A 631213

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631214

Anna und Bea spielen ein Spiel mit Stapeln von schwarzen, roten und grünen Spielsteinen.

Zu Beginn des Spiels befinden sich k Stapel von je einem schwarzen Spielstein auf dem Spielfeld, wobei k eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Die Spielerinnen sind abwechselnd am Zug. Anna beginnt. Dabei gibt es zwei erlaubte Züge:

(1) Einen roten oder grünen Spielstein (aus einem ausreichend großen Vorrat) auf einen vorhandenen Stapel legen. Dabei dürfen nach dem Zug keine zwei Spielsteine gleicher Farbe im gleichen Stapel liegen. Ein Stapel kann also nur aus höchstens drei Spielsteinen bestehen.

(2) Zwei Stapel aus dem Spiel entfernen, wobei die obersten Spielsteine der beiden Stapel die gleiche Farbe haben müssen. Die Höhe kann unterschiedlich sein.

Es hat verloren, wer nicht mehr ziehen kann.

Man entscheide

a) für sechs Stapel ($k = 6$),

b) für eine beliebige gerade Anzahl $k \geq 2$ von Stapeln,

ob eine der beiden Spielerinnen so spielen kann, dass sie den Sieg erzwingen kann, und gebe gegebenenfalls eine solche Gewinnstrategie an.

630511 Lösung *10 Punkte*

Aus (2) folgt, dass Clemens den Hamster haben muss, denn nur der hat ein Fell:

(4) **Clemens hat den Hamster.**

Aus (1) folgt, dass Anton nur den Hamster oder die Schildkröte haben kann, denn nur diese beiden Tiere haben vier Beine. Da wegen (4) schon Clemens den Hamster hat, muss Anton die Schildkröte als Haustier haben:

(5) **Anton hat die Schildkröte.**

Nun sind wegen (4) und (5) noch die Haustiere Wellensittich und Schlange übrig.

Aus (3) folgt, dass Bea nicht den Wellensittich haben kann. Also folgt:

(6) **Bea hat die Schlange.**

Folglich kann die restliche Zuordnung vorgenommen werden. Aus (4), (5) und (6) folgt:

(7) **Darius hat den Wellensittich.**

Hinweis zur Lösungsfindung mit Hilfe einer Zuordnungstabelle: Man sucht unter den gegebenen Bedingungen diejenige heraus, die die meiste Information liefert. Hier ist dies die Bedingung (2), aus der folgt, dass Clemens (C) keinen Wellensittich (We), keine Schildkröte (*Schk*) und keine Schlange (*Schl*) haben kann, was durch ein „−(2)“ in den betreffenden Feldern der Tabelle festgehalten wird. Folglich muss Clemens den Hamster (Ha) haben, was im Feld (C/Ha) durch „+(4)“ festgehalten wird. Hieraus folgt, dass Anton (A), Bea (B) und Darius (D) den Hamster nicht haben können, was durch ein „−“ in den betreffenden Feldern festgehalten wird.

Aus (1) folgt dann zweimal ein „−(1)“ in Zeile 1 und daher „+(5)“ im Feld (A/*Schk*) als letzte Möglichkeit. Hieraus folgt zweimal ein „−“ in Spalte 3.

Aus (3) folgt dann ein „−(3)“ im Feld (B/We) und hieraus „+(6)“ im Feld (B/*Schl*).

Hieraus folgt dann „+(7)“ im Feld (D/We).

	Ha	We	*Schk*	*Schl*
A	−	−(1)	+(5)	−(1)
B	−	−(3)	−	+(6)
C	+(4)	−(2)	−(2)	−(2)
D	−	+(7)	−	−

630512 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Nachzählen der aneinanderstoßenden Seiten zeigt: Es werden acht Klebestreifen benötigt.

Teil b) Auch hier Nachzählen: Es werden zwölf Klebestreifen benötigt.

Teil c) Ein solches 10×10-Quadrat besteht aus 36 Einzelquadraten.

Allgemein: Wenn man n Quadrate in einer Reihe aneinanderfügen will, braucht man dazu $n - 1$ Klebestreifen. Um sie zu einer geschlossenen Figur zusammenzufügen, benötigt man einen Klebestreifen mehr, also n Stück.

Folglich benötigt Dana 36 Klebestreifen.

Teil d) Am wenigsten Klebestreifen braucht sie, wenn sie die zwölf Quadrate einfach hintereinander in einer Reihe anordnet, nämlich elf Stück.

Legt sie ein 2×6-Rechteck, braucht sie $(2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 =)$ 16 Klebestreifen.

Legt sie ein 3×4-Rechteck, so hat sie eine Anordnung, bei der so viele Quadratseiten wie möglich aneinander liegen. Hier braucht sie $(2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 =)$ 17 Klebestreifen.

(Es kommt darauf an, möglichst wenig Quadratseiten außen liegen zu lassen.)

630513 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Anne sucht sich eine der vier Strophen aus. Danach sucht Britta sich eine der drei verbliebenen Strophen aus. Chris wählt zwischen den zwei restlichen Strophen. Schließlich nimmt Daniel die übriggebliebene Strophe.

Das ergibt $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)$ 24 Möglichkeiten.

Teil b) Es gibt 6 Möglichkeiten für die Verteilung der Strophen, die in der Tabelle systematisch aufgeschrieben worden sind.

1. Strophe	2. Strophe	3. Strophe	4. Strophe
E	E	F	F
E	F	E	F
E	F	F	E
F	E	E	F
F	E	F	E
F	F	E	E

Teil c) Angenommen, Gabriel sagt zwei Strophen hintereinander auf. Er hat dafür folgende drei Möglichkeiten: 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4

Dann gibt es noch jeweils zwei Möglichkeiten, die beiden anderen Strophen auf die beiden anderen Kinder zu verteilen. Das sind $(3 \cdot 2 =)$ 6 Möglichkeiten, die Strophen zu verteilen:

$$GGHI,\ GGIH,\ HGGI,\ IGGH,\ HIGG,\ IHGG$$

Genauso gibt es 6 Möglichkeiten, wenn stattdessen Hanna zwei Strophen vorträgt, und weitere 6 Möglichkeiten, wenn Isabel zwei Strophen vorträgt.

Insgesamt gibt es also $(3 \cdot 6 =)$ 18 Möglichkeiten, die Strophen auf die Kinder zu verteilen.

630514 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die größte zweistellige JANZAHL ist 98. Nun sind $98 \cdot 2 = 196$ und dann $196 \cdot 5 = 980$. Er erhält das Ergebnis 980.

(Klarerweise kann man auch sagen: Verdoppeln und anschließendes Verfünffachen bedeutet eine Multiplikation mit 10. Daraus folgt unmittelbar 980 als Ergebnis.)

Teil b) Um die kleinste JANZAHL zu erhalten, muss man die kleinsten Ziffern verwenden, also die Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4. Diese müssen der Größe nach geordnet werden, wobei die größte Ziffer an der Einerstelle steht. Da die 0 nicht führend sein kann – denn dann wäre die Zahl nicht mehr fünfstellig –, ist die kleinste dieser JANZAHLEN die Zahl 10234.

Teil c) Entsprechend ist die kleinste dreistellige JANZAHL die 102 und die größte die 987. Das Ergebnis von Jans Subtraktion ist folglich $(987 - 102 =)$ 885.

Teil d) JANZAHLEN sind 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 120, 123, 124 und 125. Dies sind 12 Zahlen.

Da der Zahlenbereich von 100 bis 125 insgesamt 26 Zahlen umfasst, gibt es in diesem Bereich also weniger JANZAHLEN als Nicht-JANZAHLEN.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 630511 *Insgesamt: 10 Punkte*

Korrektes Ergebnis .... 4 Punkte
Korrekte Herleitung .... 6 Punkte

Aufgabe 630512 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Ergebnis .... 1 Punkt
Teil b) Ergebnis .... 1 Punkt
Teil c) .... 3 Punkte
- Ergebnis .... 2 Punkte
- Herleitung .... 1 Punkt

Teil d) .... 5 Punkte
- Ergebnis .... 4 Punkte
- Herleitung .... 1 Punkt

Aufgabe 630513 *Insgesamt: 10 Punkte*

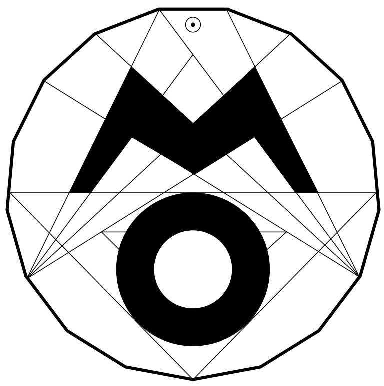
Teil a) .... 3 Punkte
- Ergebnis .... 2 Punkte
- Herleitung .... 1 Punkt

Teil b) .... 3 Punkte
- Ergebnis .... 2 Punkte
- Herleitung .... 1 Punkt

Teil c) .... 4 Punkte
- Ergebnis .... 2 Punkte
- Herleitung .... 2 Punkte

Aufgabe 630514 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a)	2 Punkte
Ergebnis	1 Punkt
Herleitung	1 Punkt
Teil b)	2 Punkte
Ergebnis	1 Punkt
Herleitung	1 Punkt
Teil c)	2 Punkte
Ergebnis	1 Punkt
Herleitung	1 Punkt
Teil d)	4 Punkte
Ergebnis	2 Punkte
Herleitung	2 Punkte



Olympiadeklasse **6**

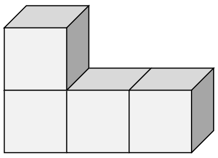
63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

630611 Lösung *10 Punkte*

Teil a)

Stab:	$2B$, $6R$, $6G$
Paket:	$4B$, $6R$, $12G$
Treppe:	$6B$, $6R$, $6G$
L:	$6B$, $6R$, $10G$

Teil b) Ein solcher Körper ist hier abgebildet:



Teil c) Der in b) abgebildete Körper verwendet sogar die wenigsten Würfel, denn: Man benötigt mindestens zwei rote Quadratflächen.

Mit genau zwei roten Flächen kann man nur Stäbe bauen, und die haben stets gleich viele blaue wie gelbe Quadratflächen außen. Also müssen es mindestens vier rote Quadratflächen sein. Folglich müssen es mindestens sechs blaue und acht gelbe Quadratflächen sein.

Für acht gelbe äußere Quadratflächen werden vier Würfel benötigt. Folglich bilden vier Würfel die kleinste mögliche Anzahl für den geforderten Körper.

Teil d) Grundsätzlich sind die Anzahlen der Quadratflächen für jede Farbe gerade, denn jeder Körper hat von oben und von unten betrachtet gleich viele blaue Quadratflächen. Entsprechend sieht man von links und von rechts gleich viele rote Quadratflächen und von vorn und von hinten gleich viele gelbe.

Wenn es aber eine blaue Fläche mehr als rote geben sollte, müsste entweder die Anzahl der roten Flächen oder die der blauen Flächen ungerade sein, was nicht sein kann.

630612 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die folgende Tabelle zeigt, bei welchen Uhrzeiten der Zeiger für die jeweiligen Drehweiten stehen bleibt, bis er wieder auf 12 Uhr steht. Die Anzahl der Drehungen, bis dies eintritt, sei als Drehhäufigkeit bezeichnet.

Drehweite	Abgelesene Uhrzeiten	Drehhäufigkeit
1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$	12
2	$2, 4, 6, 8, 10, 12$	6
3	$3, 6, 9, 12$	4
4	$4, 8, 12$	3
5	$5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12$	12
6	$6, 12$	2

Der Zeiger bleibt also genau für die Drehweiten 2, 3, 4 und 6 bereits nach weniger als 12 Drehungen bei 12 Uhr stehen.

Hinweis für AG-Leiter: Man kann auch wie folgt überlegen, dass dies genau für die echten Teiler von 12 eintritt: Statt den Zeiger auf der Uhr zu drehen, könnte Tina auch die Drehweite fortlaufend addieren und würde die Stundenanzahl als Rest bei der Division durch 12 erhalten. Für die Drehweite 5 wäre das zum Beispiel:

Summe	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Uhrzeit	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	12

Der Stundenzeiger steht dabei genau dann auf 12 Uhr, wenn die Summe einem Vielfachen von 12 entspricht. Genauer ist die Summe gleich dem Produkt aus Drehweite und Drehhäufigkeit (im obigen Beispiel: $60 = 5 \cdot 12$). Demzufolge ist die gesuchte Drehhäufigkeit die kleinste Zahl, die multipliziert mit der Drehweite ein Vielfaches von 12 liefert (das Produkt ist dann das kleinste gemeinsame Vielfache von 12 und der Drehweite). Für die Drehweiten von 1 bis 6 ist die Drehhäufigkeit also genau dann kleiner als 12, wenn die Drehweite ein echter Teiler von 12 ist.

Teil b) Man kann hier wieder eine Tabelle wie in a) anlegen und erkennt, dass bei den Drehweiten 8, 9 und 10 weniger als 12 Drehungen benötigt werden, während für die Drehweiten 7 und 11 jeweils 12 Drehungen erforderlich sind.

Hinweis zur Korrektur: Die Untersuchung einer Drehweite, die zur Lösung führt, ist ausreichend.

Ein anderer Ansatz ist: Eine Drehung um 7 Stunden im Uhrzeigersinn entspricht einer Drehung um $12 - 7 = 5$ Stunden gegen den Uhrzeigersinn. Analoges gilt für die übrigen Drehweiten. Da die Ergebnisse aus a) nicht abhängig von der Drehrichtung sind, können sie direkt übertragen werden. Für Drehungen um 2, 3 und 4 Stunden gegen den Uhrzeigersinn ist die Drehhäufigkeit kleiner als 12; dies entspricht den Drehweiten 8, 9 und 10.

Teil c) Diese Aufgabenstellung unterscheidet sich von den vorhergehenden lediglich im Startpunkt – da 12 Uhr elf Stunden hinter 1 Uhr liegt, entspricht die Frage der, für welche Drehweiten mit Start bei 12 Uhr der Zeiger irgendwann auf 11 Uhr steht. Dies kann aus den Ergebnissen aus a) und b) ermittelt werden.

Folglich erreicht der Zeiger die 12 bei der Startzeit 1 Uhr für die Drehweiten 1, 5 und 7.

Die Drehhäufigkeiten sind dann 11, 7 und 5.

630613 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Da Carolin das älteste Kind ist und Bea am selben Platz steht wie zu Beginn, stehen die Kinder am Ende in der Reihenfolge _B_C. Da nur Bea an ihrem Ausgangsplatz geblieben ist, kann Anna nicht an erster Stelle stehen. Daraus ergibt sich am Ende eindeutig die Reihenfolge DBAC.

Folglich ist Dana das jüngste Kind, dann folgen Bea, Anna und Carolin.

Alternativer Lösungsweg: Zu Beginn stehen die Kinder in der Reihenfolge ABCD. Wenn nur einmal genau zwei Kinder ihre Plätze tauschen müssen, um sich entsprechend ihrer Körpergröße zu sortieren, können nach dem Tausch folgende Reihenfolgen auftreten:

(1) BACD (A und B haben getauscht)
(2) CBAD (A und C haben getauscht)
(3) DBCA (A und D haben getauscht)
(4) ACBD (B und C haben getauscht)
(5) ADCB (B und D haben getauscht)
(6) ABDC (C und D haben getauscht)

Nach dem zweiten Platztausch ist die Reihenfolge _B_C, weil B am selben Platz wie zu Beginn steht und C das älteste Kind ist.

Diese Reihenfolge lässt sich erreichen, wenn nach dem ersten Tausch ...

Fall 1: ... B und C am richtigen Platz waren, also die Reihenfolge _B_C vorlag. Das ist nur bei (6) gegeben. Dann wird ABDC durch den zweiten Tausch zu DBAC.

Fall 2: ... B am richtigen Platz war, aber nicht C, also die Reihenfolge CB_ _ oder _BC_ vorlag. Dies betrifft die (2) und die (3), und dann wird CBAD zu DBAC bzw. DBCA wird zu DBAC.

Fall 3: ... C am richtigen Platz war, aber nicht B, also die Reihenfolge B_ _C oder _ _BC vorlag. Diese Situationen treten aber nicht nach dem ersten Platztausch auf.

Man sieht, dass in allen möglichen Fällen am Ende die Reihenfolge DBAC vorliegt.

Folglich: Das jüngste Kind ist Dana, dann folgen Bea, Anna und Carolin.

Teil b) Da sowohl die Reihenfolgen ABDC, CBAD und DBCA nach dem ersten Tausch möglich sind als auch aus allen diesen drei Reihenfolgen nach dem zweiten Tausch die Reihenfolge DBAC möglich ist, gibt es drei mögliche Reihenfolgen für die Sortierung nach Körpergröße: Das größte Kind könnte demnach Carolin, Dana oder Anna sein.

Folglich kann man aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln, welches Kind das größte ist.

Hinweis zur Korrektur: Als Lösung reicht die Angabe von zwei Reihenfolgen aus, welche die gestellten Bedingungen erfüllen.

Teil a) Mit den gegebenen Anfangszahlen erhält man die folgenden Zahlenfolgen:

$9 - 3 - 1$	$10 - 5 - 10 - 5 \ldots$	$11 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$
$12 - 6 - 3 - 1$	$13 - 18 - 9 - 3 - 1$	$14 - 7 - 12 - 6 - 3 - 1$
$15 - 5 - 10 - 5 \ldots$	$16 - 8 - 4 - 2 - 1$	$17 - 22 - 11 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$
$18 - 9 - 3 - 1$	$19 - 24 - 12 - 6 - 3 - 1$	$20 - 10 - 5 - 10 - 5 \ldots$

Teil b) Die Vermutung aus den Beispielen ist, dass alle Zahlen, die durch 5 teilbar sind, im Zyklus $10 - 5 - 10 - 5 \ldots$ enden.

Erklärung – in der Schülerlösung nicht erwartet: Diese Vermutung stimmt: Wenn man mit einer Zahl beginnt, die einen Faktor 5 in der Primfaktorzerlegung enthält, so bleibt er erhalten, wenn durch 2 oder durch 3 geteilt wird, und auch die in Schritt 4 erfolgende Addition von 5 ändert nichts daran, dass auch in den folgenden Zahlen ein Faktor 5 enthalten ist.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 630611 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Ergebnis .... 4 Punkte
Teil b) Ergebnis .... 2 Punkte
Teil c) .... 2 Punkte
    Ergebnis .... 1 Punkt
    Herleitung .... 1 Punkt
Teil d) .... 2 Punkte
    Ergebnis .... 1 Punkt
    Herleitung .... 1 Punkt

Aufgabe 630612 *Insgesamt: 10 Punkte*

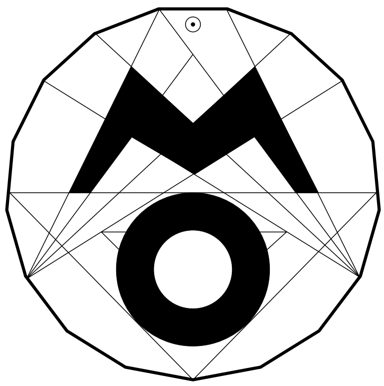
Teil a) .... 4 Punkte
    Ergebnis .... 2 Punkte
    Herleitung .... 2 Punkte
Teil b) .... 3 Punkte
    Ergebnis .... 1 Punkt
    Herleitung .... 2 Punkte
Teil c) .... 3 Punkte
    Ergebnis .... 1 Punkt
    Herleitung .... 2 Punkte

Aufgabe 630613 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 6 Punkte
    Ergebnis .... 2 Punkte
    Begründung .... 4 Punkte
Teil b) Begründung .... 4 Punkte

Aufgabe 630614 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 8 Punkte
Teil b) .... 2 Punkte



63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

630711 Lösung *9 Punkte*

Da keine zwei dieser Personen in derselben Stadt wohnen, folgt aus (4) und (5):

Herr Helbig ist Dachdecker und wohnt in Jena. (7)

Aus (1) folgt, dass der Arzt in Köln wohnt, und aus (6) folgt, dass der Chemiker nicht in Ingolstadt wohnt. Hieraus und aus (7) folgt:

Der Chemiker wohnt in Leipzig und der Biologe in Ingolstadt. (8)

Aus (2) und (3) folgt, dass der Chemiker nicht Ehlers, nicht Helbig und auch nicht Gröger heißt. Hieraus und aus (8) folgt:

Herr Fink ist Chemiker und wohnt in Leipzig. (9)

Aus (2) folgt, dass der Arzt nicht Ehlers heißt, wegen (7) und (9) heißt er auch nicht Helbig oder Fink, also heißt er Gröger. Hieraus und aus (1) folgt:

Herr Gröger ist Arzt und wohnt in Köln. (10)

Aus (7), (9) und (10) folgt:

Herr Ehlers ist Biologe und wohnt in Ingolstadt. (11)

Die Berufe und Wohnorte der vier Personen sind unter (7), (9), (10) und (11) angegeben.

630712 Lösung *9 Punkte*

Teil a) Die gesuchten Zahlen sind 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97 und 101.

Teil b) Die gesuchten Zahlen sind 79, 97 und 101. Es gelten $79 = 11+31+37$, $97 = 11+13+73$ und $101 = 11 + 17 + 73$ (sowie auch $101 = 13 + 17 + 71$).

Teil c) Alle Umkehrprimzahlen größer als 10 sind ungerade Zahlen. Da die Summe von genau vier ungeraden Zahlen stets gerade ist, kann man nicht genau vier Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 so auswählen, dass deren Summe eine Umkehrprimzahl ist.

Teil d) Da die Summe der kleinsten fünf der Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 wegen $11 + 13 + 17 + 31 + 37 = 109$ bereits eine dreistellige Zahl ist, kann man nicht aus den Umkehrprimzahlen zwischen 10 und 102 genau 5 so auswählen, dass keine zwei von ihnen gleich sind und dass deren Summe eine zweistellige Umkehrprimzahl ist.

630713 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller sei n. Da die Schachteln nichtleer waren, gilt $n > 1$. Da in jedem Zug mindestens ein Streichholz gezogen wird, können nicht mehr als n

Züge gemacht werden. Folglich endet das Spiel. Zum Spielende können nicht mindestens zwei Streichhölzer auf dem Teller liegen, da dann noch mindestens ein Streichholz gezogen werden kann. Da bei jedem Zug nicht mehr als die Hälfte der Streichhölzer entnommen werden darf, bleibt auch mindestens eines liegen. Folglich verbleibt zum Spielende genau ein Streichholz auf dem Teller. Der Spieler, der dann am Zug ist, gewinnt.

Teil b) Der erste Zug von Ben ist regelkonform, da er mit genau 25 Streichhölzern mindestens eines und auch nicht mehr als die Hälfte der 120 Streichhölzer zieht. Nach seinem Zug liegen $(120 - 25 =)$ 95 Streichhölzer auf dem Teller.

Leon zieht von den 95 Streichhölzern nun mindestens 1 Streichholz und nicht mehr als die Hälfte von 95, also höchstens 47 Streichhölzer. Es verbleiben mindestens 48 und höchstens 94 Streichhölzer auf dem Teller. Ben berechnet nach seiner Strategie $(95 - 1) : 2 = 47$. Wegen $48 = 47 + 1$ und $94 = 2 \cdot 47$ kann Ben in seinem Zug die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller regelkonform auf genau 47 verringern.

Leon zieht von den 47 Streichhölzern nun mindestens 1 Streichholz und nicht mehr als die Hälfte von 47, also höchstens 23 Streichhölzer. Es verbleiben mindestens 24 und höchstens 46 Streichhölzer auf dem Teller. Ben berechnet $(47 - 1) : 2 = 23$. Wegen $24 = 23 + 1$ und $46 = 2 \cdot 23$ kann Ben in seinem Zug die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller regelkonform auf genau 23 verringern.

Leon zieht nun mindestens 1 Streichholz und nicht mehr als die Hälfte von 23, also höchstens 11 Streichhölzer. Es verbleiben mindestens 12 und höchstens 22 Streichhölzer auf dem Teller. Ben berechnet $(23 - 1) : 2 = 11$. Wegen $12 = 11 + 1$ und $22 = 2 \cdot 11$ kann Ben in seinem Zug die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller regelkonform auf genau 11 verringern.

Leon zieht nun mindestens 1 Streichholz und nicht mehr als die Hälfte von 11, also höchstens 5 Streichhölzer. Es verbleiben mindestens 6 und höchstens 10 Streichhölzer auf dem Teller. Ben berechnet $(11 - 1) : 2 = 5$. Wegen $6 = 5 + 1$ und $10 = 2 \cdot 5$ kann Ben in seinem Zug die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller regelkonform auf genau 5 verringern.

Leon zieht nun mindestens 1 Streichholz und nicht mehr als die Hälfte von 5, also höchstens 2 Streichhölzer. Es verbleiben mindestens 3 und höchstens 4 Streichhölzer auf dem Teller. Ben berechnet $(5 - 1) : 2 = 2$. Wegen $3 = 2 + 1$ und $4 = 2 \cdot 2$ kann Ben in seinem Zug die Anzahl der Streichhölzer auf dem Teller regelkonform auf genau 2 verringern.

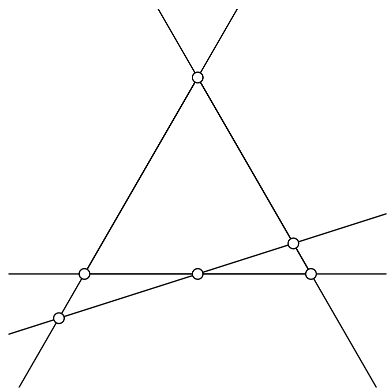
Leon kann nun nur genau ein Streichholz ziehen, es bleibt genau eines liegen. Ben kann nun regelkonform das letzte Streichholz nehmen und gewinnt.

Teil c) Ben kann nicht bei jeder Anzahl von Streichhölzern in den vollen Streichholzschachteln gewinnen. Wenn zum Beispiel zusammen 95 Streichhölzer in den drei Streichholzschachteln enthalten sind, dann kann Leon die Strategie von Ben übernehmen, womit Ben verliert.

Bemerkung: Bei einigen Strategieaufgaben kann es zum Finden einer Gewinnstrategie zielführend sein, dass man rückwärts arbeitet. Man sucht also vom Spielende her eine Gewinnstellung, mit der man sicher gewinnt, und überlegt sich, aus welchen Stellungen man in eine solche Gewinnstellung gelangen kann, welche Stellungen also alles Gewinnstellungen sind.

Wie die Lösung zeigt, sind die Zahlen v_k mit $v_0 = 2$ und $v_{k+1} = 2 \cdot v_k + 1$ für natürliche Zahlen k ab 1, also die Zahlen 2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, ... Verliererzahlen für denjenigen, der mit dieser Anzahl an Streichhölzern auf dem Teller am Zug ist. Der andere Spieler hat dann eine Gewinnstrategie, da für ihn alle von diesen Verliererzahlen verschiedenen natürliche Zahlen ab 1 Gewinnzahlen sind.

Teil a) Wir nummerieren die Geraden. Die erste Gerade kann dann höchstens mit den drei anderen Geraden je einen Schnittpunkt haben. Die zweite Gerade kann dann höchstens noch mit den beiden restlichen Geraden je einen noch nicht gezählten Schnittpunkt haben. Die dritte Gerade kann schließlich höchstens noch mit der vierten Gerade einen noch nicht gezählten Schnittpunkt haben. Das sind insgesamt höchstens $(3 + 2 + 1 =)$ 6 Schnittpunkte.



L 630714 a

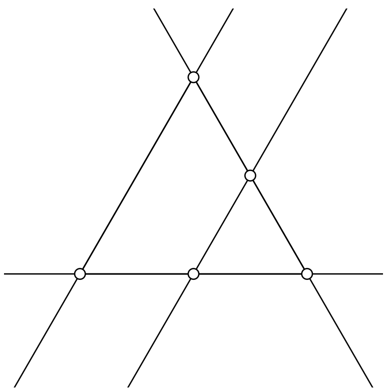
Tatsächlich haben vier Geraden genau 6 Schnittpunkte, wenn keine zwei von ihnen parallel zueinander sind und keine drei von ihnen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, siehe Abbildung L 630714 a.

Folglich ist 6 die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten, die vier Geraden, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, untereinander haben können.

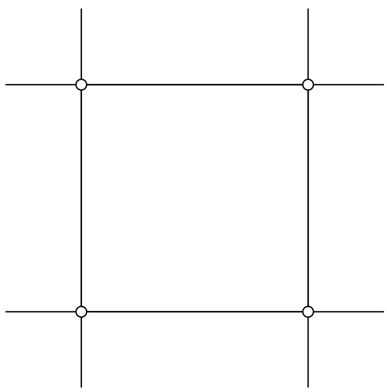
Teil b) Wir untersuchen nun, ob auch die Zahlen 5, 4, 3, 2, 1 und 0 als Anzahlen an Schnittpunkten von vier Geraden, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, auftreten können. Im positiven Fall genügt die Angabe einer entsprechenden Lage, im negativen Fall ist eine entsprechende Begründung erforderlich:

Genau 5 Schnittpunkte entstehen, wenn es unter den vier Geraden nur zwei zueinander parallele Geraden gibt und keine drei der vier Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, siehe Abbildung L 630714 b.

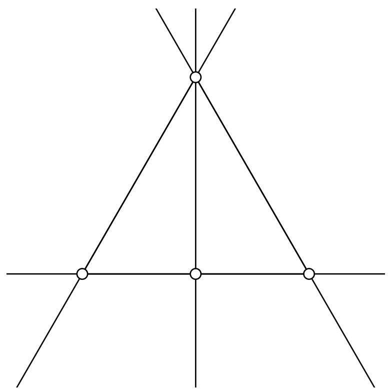
Genau 4 Schnittpunkte entstehen, wenn es unter den vier Geraden nur zwei Paare zueinander paralleler Geraden gibt, siehe Abbildung L 630714 c, oder es unter ihnen kein Paar zueinander paralleler Geraden gibt, aber genau drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, siehe Abbildung L 630714 d.



L 630714 b

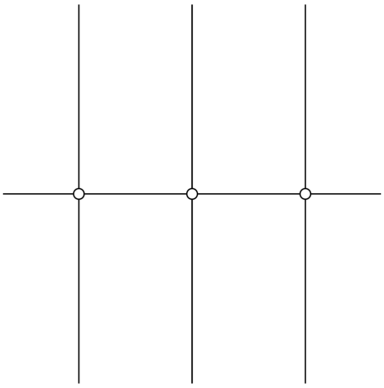


L 630714 c

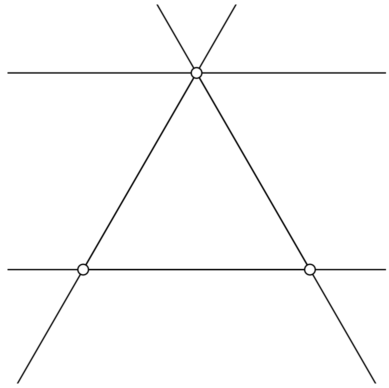


L 630714 d

Genau 3 Schnittpunkte entstehen, wenn es unter den vier Geraden genau drei zueinander parallele Geraden gibt, siehe Abbildung L 630714 e, oder es unter ihnen genau zwei zueinander parallele Geraden gibt, aber genau drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, siehe Abbildung L 630714 f.



L 630714 e



L 630714 f

Genau 2 Schnittpunkte können nicht entstehen. Zum Beweis nehmen wir an, mit den vier Geraden seien genau zwei Schnittpunkte entstanden. Diese nennen wir A und B.

Fall 1: Eine der vier Geraden verlaufe durch A und durch B. Wir nennen diese Gerade c. Dann gibt es unter den vier Geraden eine von c verschiedene Gerade, die die Gerade c im Punkt A schneidet. Diese Gerade nennen wir a. Dann gibt es unter den vier Geraden eine von c verschiedene Gerade, die die Gerade c im Punkt B schneidet. Diese Gerade nennen wir b. Die Geraden a und b sind verschieden voneinander, da andernfalls die Geraden a, b und c alle durch den Punkt A und den Punkt B verlaufen und daher $a = b = c$ im Widerspruch zu $a \neq c$ und $b \neq c$ folgt. Folglich sind mit a, b und c schon drei der vier Geraden genannt. Die übrige Gerade nennen wir d.
Die Geraden a und b sind parallel zueinander, da sie sich andernfalls in einem von A und B verschiedenen Punkt schneiden müssten.

Fall 1.1: Die Gerade d schneide die Gerade c. Dann schneidet die Gerade d die Gerade c im Punkt A oder im Punkt B. Durch Umbenennen können wir erreichen, dass die Gerade d die Gerade c im Punkt A schneidet. Wegen $d \neq a$ ist die Gerade d auch nicht parallel zur Gerade a. Da die Geraden a und b parallel zueinander sind, ist die Gerade d auch nicht parallel zur Gerade b. Folglich schneidet die Gerade d die Gerade b in einem Punkt, den wir C nennen. Dieser Punkt C ist verschieden von B, da sonst die Geraden c und d durch A und B verlaufen und daher im Widerspruch zur Voraussetzung nicht verschieden voneinander sind. Dieser Punkt C ist aber auch verschieden vom Punkt A, da andernfalls die Geraden c und b durch A und B verlaufen und daher im Widerspruch zur Voraussetzung nicht verschieden voneinander sind. Daher haben die vier Geraden untereinander mindestens drei Schnittpunkte, was der Annahme widerspricht.

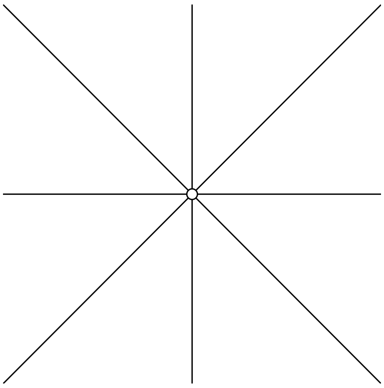
Fall 1.2: Die Gerade d schneide die Gerade c nicht. Dann ist die Gerade d parallel zur Gerade c, aber nicht parallel zur Gerade a. Folglich schneidet d die Gerade a in einem von A und B verschiedenen Punkt, was der Annahme widerspricht.

Fall 2: Keine der vier Geraden verlaufe durch A und durch B. Dann ist der Punkt A Schnittpunkt von zwei verschiedenen der vier Geraden. Diese nennen wir a und c. Weiter ist der Punkt B Schnittpunkt von zwei verschiedenen der vier Geraden. Diese nennen wir b und d. Die Geraden a und b sind verschieden voneinander, da sonst die Gerade a durch A und durch B verlaufen würde. Ebenso folgt, dass a und d, c und b sowie c und d jeweils verschieden voneinander sind. Daher sind a, b, c und d die betrachteten vier Geraden. Da die Geraden a und c durch A verlaufen, aber auch verschieden voneinander sind, sind sie nicht parallel zueinander. Folglich ist die Gerade b nicht parallel zu a oder zu c. Durch Umbenennen können wir erreichen, dass die Gerade b nicht parallel zur Gerade a ist.

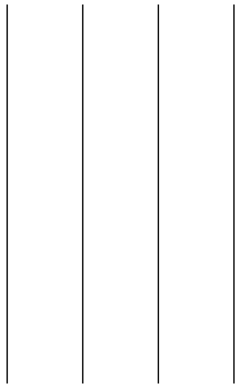
Folglich schneiden sich die Geraden a und b in einem Punkt, den wir C nennen. Dieser Punkt C ist verschieden vom Punkt A, da andernfalls die Gerade b durch A und durch B verlaufen würde, und er ist verschieden vom Punkt B, da andernfalls die Gerade a durch A und durch B verlaufen würde. Daher haben die vier Geraden untereinander mindestens drei Schnittpunkte, was der Annahme widerspricht.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist und jeder der Fälle zu einen Widerspruch führt, ist die Annahme widerlegt. Es können also nicht genau 2 Schnittpunkte entstehen.

Genau 1 Schnittpunkt entsteht, wenn sie alle einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, siehe Abbildung L 630714 g.



L 630714 g



L 630714 h

Genau 0 Schnittpunkte entstehen, wenn die vier Geraden alle parallel zueinander sind, siehe Abbildung L 630714 h.

Folglich sind 0, 1, 3, 4, 5 und 6 alle möglichen Anzahlen von Schnittpunkten, die vier Geraden, von denen keine mit einer anderen übereinstimmt, untereinander haben können.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 630711 *Insgesamt: 9 Punkte*

Grundsätzlich geeigneter Ansatz .... 2 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung der Zuordnung von Beruf und Wohnort zu einer Person .... 2 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung der Zuordnung von Beruf und Wohnort zu einer zweiten Person .... 2 Punkte
Vollständige und korrekte Herleitung der Zuordnung von Beruf und Wohnort zu einer dritten Person .... 2 Punkte
Angabe der Zuordnung von Beruf und Wohnort zur vierten Person .... 1 Punkt

Aufgabe 630712 *Insgesamt: 9 Punkte*

Teil a) .... 2 Punkte
- Für die ersten fünf korrekten Umkehrprimzahlen, wenn keine falsche Umkehrprimzahl angegeben wurde .... 1 Punkt
- Für die weiteren fünf korrekten Umkehrprimzahlen, wenn nicht mehr als eine falsche Umkehrprimzahl angegeben wurden .... 1 Punkt

Teil b) .... 3 Punkte
- Für die erste korrekte Umkehrprimzahl mit Summendarstellung, wenn keine falsche Umkehrprimzahl angegeben wurde .... 1 Punkt
- Für die zweite korrekte Umkehrprimzahl mit Summendarstellung, wenn nicht mehr als eine falsche Umkehrprimzahl angegeben wurde .... 1 Punkt
- Für die dritte korrekte Umkehrprimzahl mit Summendarstellung, wenn nicht mehr als zwei falsche Umkehrprimzahlen angegeben wurde .... 1 Punkt

Teil c) .... 2 Punkte
Teil d) .... 2 Punkte

Aufgabe 630713 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 3 Punkte

Begründung für Endlichkeit des Spieles .... 1 Punkt

Begründung, dass es immer einen Gewinner gibt .... 2 Punkte

Teil b) .... 5 Punkte

Korrektes Umsetzen der ersten beiden Punkte der Strategie .... 4 Punkte

Korrektes Umsetzen des dritten Punktes der Strategie .... 1 Punkt

Teil c) .... 2 Punkte

Aufgabe 630714 *Insgesamt: 12 Punkte*

Teil a) .... 4 Punkte

Korrekte maximale Anzahl an Schnittpunkten .... 1 Punkt

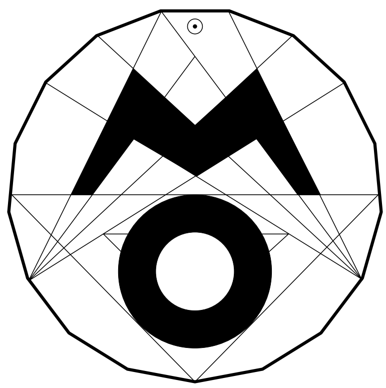
Zeichnung mit der maximalen Anzahl an Schnittpunkten .... 1 Punkt

Begründung, warum mehr Schnittpunkte nicht möglich sind .... 2 Punkte

Teil b) .... 8 Punkte

Existenz von fünf, vier, drei, einem und null Schnittpunkt(en)
mit Erklärung (Zeichnung) .... 5 Punkte

Begründung, dass es nicht genau zwei Schnittpunkte gibt .... 3 Punkte



63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

630811 Lösung *10 Punkte*

Wir bezeichnen den Flächeninhalt eines Dreiecks PQR mit A_{PQR}, eines Vierecks $PQRS$ mit A_{PQRS} und eines Fünfecks $PQRST$ mit A_{PQRST}.

Da das Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm ist, gelten

$$\mathrm{A}_{ABCD} = 16\,\mathrm{cm}^2 \tag{1}$$

und

$$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right| = 4\,\mathrm{cm}\,. \tag{2}$$

Da der Punkt M der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ ist, folgt aus (2)

$$\left|\overline{CM}\right| = \left|\overline{DM}\right| = 2\,\mathrm{cm}\,. \tag{3}$$

Da der Punkt L der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CM}$ ist, folgt aus (3)

$$\left|\overline{CL}\right| = \left|\overline{LM}\right| = 1\,\mathrm{cm}\,. \tag{4}$$

Da der Punkt N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DM}$ ist, folgt aus (3)

$$\left|\overline{DN}\right| = \left|\overline{MN}\right| = 1\,\mathrm{cm}. \tag{5}$$

Da das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, hat das Dreieck AND einen rechten Innenwinkel im Punkt D und das Dreieck BCL einen rechten Innenwinkel im Punkt C. Daher gelten $\mathrm{A}_{AND} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{DN}\right|$ und $\mathrm{A}_{BCL} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BC}\right| \cdot \left|\overline{CL}\right|$. Wegen (2), (4) und (5) gilt daher

$$\mathrm{A}_{AND} = \mathrm{A}_{BCL} = \frac{1}{2} \cdot 4\,\mathrm{cm} \cdot 1\,\mathrm{cm} = 2\,\mathrm{cm}^2\,. \tag{6}$$

Da der Punkt O im Inneren des Quadrates $ABCD$ und die Punkte O und M auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{CD}$ liegen, ist MO die Höhe im Dreieck LNO zur Seite $\overline{LN}$. Daher gilt $\mathrm{A}_{LNO} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{LN}\right| \cdot \left|\overline{MO}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overline{LM}\right| + \left|\overline{MN}\right|\right) \cdot \left|\overline{MO}\right|$. Wegen (4) und (5) gilt daher

$$\mathrm{A}_{LNO} = \frac{1}{2} \cdot (1\,\mathrm{cm} + 1\,\mathrm{cm}) \cdot \left|\overline{MO}\right| = 1\,\mathrm{cm} \cdot \left|\overline{MO}\right|\,. \tag{7}$$

Die Fläche des Quadrates $ABCD$ setzt sich aus den Flächen der Dreiecke AND, BCL und LNO sowie des Fünfecks $ABLON$ zusammen. Daher gilt

$$\mathrm{A}_{ABCD} = \mathrm{A}_{AND} + \mathrm{A}_{BCL} + \mathrm{A}_{LNO} + \mathrm{A}_{ABLON}.$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{A}_{LNO} = \mathrm{A}_{ABCD} - \mathrm{A}_{AND} - \mathrm{A}_{BCL} - \mathrm{A}_{ABLON}.$$

Wegen (1), (6) und (7) folgt hieraus

$$1\,\mathrm{cm} \cdot \left|\overline{MO}\right| = 16\,\mathrm{cm}^2 - 2\,\mathrm{cm}^2 - 2\,\mathrm{cm}^2 - \mathrm{A}_{ABLON}$$

und daher

$$\left|\overline{MO}\right| = 12\,\text{cm} - \frac{1}{1\,\text{cm}} \cdot \text{A}_{ABLON}. \tag{8}$$

Teil a) Aus $\text{A}_{ABLON} = 9\,\text{cm}^2$ und (8) folgt $\left|\overline{MO}\right| = 12\,\text{cm} - 9\,\text{cm} = 3\,\text{cm}$. Die Strecke $\overline{MO}$ hat also die Länge 3 cm.

Teil b) Angenommen, es gibt einen solchen Punkt O. Es sei M' der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ mit der Geraden AB. Da das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, ist der Punkt M' der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und die Strecke $\overline{MM'}$ ist genau so lang wie die Seiten des Quadrats $ABCD$, sie hat also auch die Länge 4 cm. Da der Punkt O auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{CD}$ und im Innern des Quadrats $ABCD$ liegt, folgt $\left|\overline{MO}\right| < \left|\overline{MM'}\right| = 4\,\text{cm}$. Aus $\text{A}_{ABLON} = 7\,\text{cm}^2$ und (8) folgt aber dazu im Widerspruch $\left|\overline{MO}\right| = 12\,\text{cm} - 7\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$. Folglich gibt es keinen solchen Punkt O.

<u>630812 Lösung</u> *10 Punkte*

Erste Lösung: Die Zahl 518 215 ist die Differenz aus der Zahl, die durch das Anfügen der Ziffer 5 links und der Ziffer 8 rechts an die von Linda gedachte Zahl entstanden ist, und der von Linda gedachten Zahl. Die Zahl, die durch das Anfügen der beiden Ziffern entstanden ist, ist somit größer als 518 215 und folglich mindestens sechsstellig.

Angenommen, die durch das Anfügen der beiden Ziffern entstandene Zahl hat mehr als sechs Stellen. Da diese Zahl aber mit 5 beginnt, hat die Differenz aus ihr und 518 215 dann wieder die gleiche Stellenzahl, also nicht zwei Stellen weniger. Folglich hat die durch das Anfügen der beiden Ziffern entstandene Zahl genau sechs Stellen und die von Linda gedachte Zahl daher genau vier Stellen. Die von Linda gedachte Zahl ist also $A\,BCD$, wobei A, B, C und D Ziffern mit $A \neq 0$ sind.

Die von Linda gedachte Zahl ist auch die Differenz aus der durch das Anfügen der beiden Ziffern 5 und 8 entstandenen Zahl und der Zahl 518 215. Folglich gilt

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & A & B & C & D & 8 \\ - & 5 & 1 & 8 & 2 & 1 & 5 \\ \hline & & & A & B & C & D \end{array}\ .$$

Hieraus folgt $8 - 5 = D$ und daher $D = 3$, hieraus folgt $3 - 1 = C$ und daher $C = 2$ sowie $2 - 2 = B$ und daher $B = 0$. Wegen $0 < 8$ folgt nun $10 - 8 = A$ und daher $A = 2$.

Damit ist die von Linda gedachte Zahl eindeutig bestimmt; es handelt sich um die Zahl 2023.

Zweite Lösung: Wir bezeichnen die von Linda gedachte Zahl mit x und die durch Anfügen von 5 und 8 aus der Zahl x entstandene Zahl mit y. Dann gilt $y - x = 518\,215$, weswegen y größer als 518 215 und daher mindestens sechsstellig ist.

Angenommen, y ist mindestens siebenstellig. Aus $y - x = 518\,215$ folgt $y - 518\,215 = x$. Da y mit 5 beginnt, hat die Differenz $y - 518\,215$ gleich viele Stellen wie y im Widerspruch dazu, dass x zwei Stellen weniger als y hat. Folglich ist y höchstens sechsstellig.

Da y auch mindestens sechsstellig ist, ist y sechsstellig und daher x vierstellig. Folglich gilt $y = 500\,000 + 10 \cdot x + 8$. Hieraus und aus $y - x = 518\,215$ folgt $(500\,000 + 10 \cdot x + 8) - x = 518\,215$, weiter $9 \cdot x = 18\,207$ und schließlich $x = 2023$.

Die von Linda gedachte Zahl ist somit eindeutig bestimmt; es handelt sich um die Zahl 2023.

630813 Lösung *10 Punkte*

Die Tabelle A 630813 a kann wie gefordert ausgefüllt werden, wie es das folgende Beispiel zeigt:

	1	2	3	4	5	6
1		×	×	×		
2	×			×	×	
3	×				×	×
4	×	×				×
5		×	×			×
6			×	×	×	

Angenommen, die Tabelle A 630813 b ist wie gefordert ausgefüllt.

Nach Eigenschaft (1) stehen in jeder der fünf Zeilen genau drei Kreuze. Insgesamt sind es daher genau 15 Kreuze.

Nach Eigenschaft (3) ist die Tabelle symmetrisch zur Diagonalen von oben links nach unten rechts. Nach Eigenschaft (2) haben die Felder mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer keine Kreuze. Daher ist die Anzahl der Kreuze gerade.

Da 15 keine gerade Zahl ist, haben wir einen Widerspruch erhalten, weswegen die Tabelle A 630813 b nicht wie gefordert ausgefüllt werden kann.

630814 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Es sei z eine der gesuchten Zahlen und es seien a und b die beiden noch unbekannten Ziffern von z. Da die Zahl z durch 9 teilbar ist, ist auch ihre Quersumme $(a+b+2+0+2+3\ =)\ a+b+7$ durch 9 teilbar. Da a und b als Ziffern größer oder gleich 0 und kleiner oder gleich 9 sind, gilt $a+b+7=9$ oder $a+b+7=18$, daher $a+b=2$ oder $a+b=11$ und folglich

$$(a,b) \in \{(0,2),(1,1),(2,0),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6),(6,5),(7,4),(8,3),(9,2)\}\,. \qquad (1)$$

Umgekehrt ist jede sechsstellige Zahl z mit den Ziffern a, b, 2, 0, 2 und 3 mit (1) auch durch 9 teilbar.

Die durch 9 teilbaren Zahlen, die im Dezimalsystem sechsstellig sind und unter ihren Ziffern die Ziffern 2, 0, 2 und 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend haben, sind daher alle Zahlen der Formen $ab2\,023$, $a20\,23b$ und $202\,3ab$ mit (1), wobei bei den ersten beiden Formen $a \neq 0$ gilt.

Es gibt genau 10 Zahlen der Form $ab2\,023$ mit (1) und $a \neq 0$, genau 10 Zahlen der Form $a20\,23b$ mit (1) und $a \neq 0$ sowie genau 11 Zahlen der Form $202\,3ab$ mit (1), wobei keine dieser Zahlen zu zwei der Formen $ab2\,023$, $a20\,23b$ und $202\,3ab$ zugleich gehört.

Folglich gibt es genau $(10+10+11=)$ 31 im Dezimalsystem sechsstellige Zahlen, die durch 9 teilbar sind und die Ziffern 2, 0, 2, 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend enthalten.

Zweite Lösung: Da durch die Ziffernfolge der Zahl 2 023 schon vier der sechs Ziffern vorgegeben sind, können die noch freien Ziffern wie nachfolgend angegeben nur an den mit $*$ markierten Stellen stehen:

$$**2\,023\,,\quad *2\,023*\,,\quad 2\,023**\,.$$

Für die Platzierung von zwei untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern gibt es für jede dieser drei Varianten genau zwei Möglichkeiten. Man erhält so also insgesamt 6 Zahlen durch Einfügen zweier untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern.

Für die Platzierung einer doppelten, von 0 verschiedenen Ziffer gibt es für jede dieser drei Varianten genau eine Möglichkeit. Man erhält so also insgesamt 3 Zahlen durch Einfügen zweier untereinander und von 0 verschiedenen Ziffern.

Für die Platzierung der Ziffer 0 und einer von 0 verschiedenen Ziffer gibt es bei $**2\,023$ und bei $*2\,023*$ nur eine Möglichkeit, da 0 keine führende Ziffer sein darf, bei der dritten Variante aber wieder zwei Möglichkeiten. Man erhält also insgesamt 4 Zahlen durch Einfügen der Ziffer 0 und einer von 0 verschiedenen Ziffer.

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Da durch die Ziffernfolge der Zahl 2 023 schon vier der sechs Ziffern vorgegeben sind, muss wegen $2+0+2+3=7$ die Summe der beiden noch unbekannten Ziffern gleich $(9-7=)$ 2 oder $(18-7=)$ 11 sein, da sie nicht größer als $(9+9=)$ 18 sein kann.

Es gelten $2=0+2=1+1$ und $11=2+9=3+8=4+7=5+6$.

Nach den Vorbemerkungen gibt es für 0 und 2 genau 4 Zahlen, für 1 und 1 genau 3 und für jede der anderen 4 Möglichkeiten genau 6 Zahlen.

Da die zu 0 und 2, 1 und 1, 2 und 9, 3 und 8, 4 und 7 sowie 5 und 6 gehörenden im Dezimalsystem sechsstelligen Zahlen paarweise verschieden sind, sind es insgesamt $(4+3+4\cdot 6=)$ 31 im Dezimalsystem sechsstellige Zahlen, die durch 9 teilbar sind und die Ziffern 2, 0, 2, 3 in genau dieser Reihenfolge unmittelbar aufeinanderfolgend enthalten.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 630811 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 7 Punkte
- Geeignete Flächenzerlegung, Berechnung der Flächeninhalte von Teilflächen mit bekannten Seitenlängen .... 4 Punkte
- Berechnung von $|\overline{MO}|$ .... 3 Punkte

Teil b) .... 3 Punkte

Aufgabe 630812 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Angabe der korrekten gesuchten Zahl .... 2 Punkte
Begründung, dass diese Zahl die geforderten Eigenschaften hat .... 2 Punkte
Begründung, dass diese Zahl eindeutig bestimmt ist .... 6 Punkte

oder

Korrekte Herleitung mehrerer Kandidaten für die gesuchte Zahl .... 6 Punkte
Probe an der Aufgabenstellung zum Ausschluss der weiteren Kandidaten .... 2 Punkte
Angabe der korrekten gesuchten Zahl .... 2 Punkte

oder (ähnlich zu den vorgestellten Lösungen)

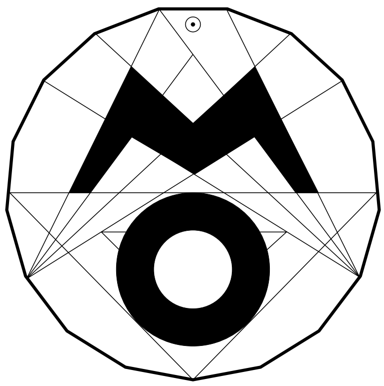
Korrekte Herleitung der gesuchte Zahl inklusive des Nachweises, dass sie eindeutig bestimmt ist .... 8 Punkte
Angabe der korrekten gesuchten Zahl .... 2 Punkte

Aufgabe 630813 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Beispiel für eine korrekt ausgefüllte Tabelle A 630813 a .... 6 Punkte
Nachweis, dass die Tabelle A 630813 b nicht wie gefordert ausgefüllt werden kann .... 4 Punkte

Aufgabe 630814 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Herleitung der zu besetzenden Stellen .... 2 Punkte
Begründung, dass die Summe der fehlenden Ziffern 2 oder 11 ist .... 2 Punkte
Korrekte Ermittlung der Anzahlen für einzelne Ziffernpaare .... 5 Punkte
Ergebnis .... 1 Punkt


M
O

63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

631011 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Es gilt

$$\begin{aligned} a &= (444\,444\,444\,444\,444 + 1)^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 2 \cdot 444\,444\,444\,444\,444 + 1 + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 888\,888\,888\,888\,888 + 111\,111\,111\,111\,111 + 1 \\ &= 999\,999\,999\,999\,999 + 1 \\ &= 1\,000\,000\,000\,000\,000\,. \end{aligned}$$

Die Quersumme von a ist also 1.

Für b ergibt sich

$$\begin{aligned} b &= (444\,444\,444\,444\,444 + 10^{14})^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 2 \cdot 10^{14} \cdot 444\,444\,444\,444\,444 + 10^{28} + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 888\,888\,888\,888\,888 \cdot 10^{14} + 10^{28} + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 98\,888\,888\,888\,888\,800\,000\,000\,000\,000 + 111\,111\,111\,111\,111 \\ &= 98\,888\,888\,888\,888\,911\,111\,111\,111\,111. \end{aligned}$$

Die Quersumme von b ist daher $(9 + 13 \cdot 8 + 9 + 14 \cdot 1 =)\,136$.

Teil b) Für eine Ziffer z sei z_s diejenige s-stellige Zahl, deren Zifferndarstellung an jeder der s Stellen die Ziffer z hat.

Ersetzen einer Ziffer 4 in der Zahl m an der Stelle $p+1$ mit Stellenwert 10^p durch die Ziffer 5 entspricht der Addition von 10^p. Dabei kann $p+1$ eine beliebige der natürlichen Zahlen von 1 bis s sein, was $0 \le p < s$ zur Folge hat.

Zur Quersummenberechnung kommt man über das Gegebene wie folgt. Es ist $k = \underbrace{1...1}_{s} = 1_s$, $m = 4 \cdot 1_s = 4_s$ sowie $n = m + 10^p = 4_s + 10^p$.

Für $p = 0$ erhalten wir $c = (4_s + 1)^2 - 4_s^2 + 1_s = 2 \cdot 4_s + 1 + 1_s = \underbrace{9...9}_{s} + 1 = 1\underbrace{0...0}_{s}$ mit der Quersumme 1.

Wir können für die weiteren Fälle nun $p > 0$ und damit $s > 1$ voraussetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= n^2 - m^2 + k = (4_s + 10^p)^2 - 4_s^2 + 1_s \\ &= 2 \cdot 4_s \cdot 10^p + 10^{2p} + 1_s = 8_s \cdot 10^p + 1_s + 10^{2p} \\ &= 8_p \cdot 10^s + 9_{s-p} \cdot 10^p + 1_p + 10^{2p} \\ &= \underbrace{8...8}_{p}\underbrace{9...9}_{s-p}\underbrace{1...1}_{p} + 10^{2p}\,, \end{aligned}$$

wobei die Beziehungen $8_s = 8_p \cdot 10^{s-p} + 8_{s-p}$ und $1_s = 1_{s-p} \cdot 10^s + 1_p$ verwendet wurden.

Da $2p > p$ ist, muss die Frage geklärt werden, ob es einen Übertrag bei der Addition von 10^{2p} gibt. Wir unterscheiden dazu die Fälle $0 < 2p < s$ und $2p \geq s$.

Fall 1: Für $2p \geq s$ erhalten wir stets den gleichen Wert für die Quersumme. Es gilt

$$\begin{aligned} c &= 1_p + 9_{s-p} \cdot 10^p + 8_{2p-s} \cdot 10^s + 9 \cdot 10^{2p} + 8_{s-p-1} 10^{2p+1}\,, \\ Q(c) &= 1 \cdot p + 9 \cdot (s-p) + 8 \cdot (2p-s) + 9 + 8 \cdot (s-p-1) \\ &= 9s + 1\,. \end{aligned}$$

Dieser Fall tritt für alle $s > 1$ auf, beispielsweise für $p = s - 1$.

Fall 2: Für $0 < 2p < s$ erhalten wir durch

$$\begin{aligned} c &= 1_p + 9_p \cdot 10^p + 9 \cdot 10^s + 8_{p-1} \cdot 10^{s+1} \\ &= \underbrace{8...89}_{p}\underbrace{0...0}_{s-2p}\underbrace{9...9}_{p}\underbrace{1...1}_{p}\,, \\ Q(c) &= 1 \cdot p + 9 \cdot p + 9 + 8 \cdot (p-1) \\ &= 18p + 1 \end{aligned}$$

mit $1 < Q(c) = 18p + 1 < 9s + 1$ genau so viele weitere Quersummen, wie es positive gerade Zahlen kleiner als s gibt, also $\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1$ Stück.

Insgesamt ergibt sich für $s = 1$ genau ein Wert für die Quersumme. Im Falle $s > 1$ ergeben sich $1 + 1 + \lceil \frac{s}{2} \rceil - 1 = \lceil \frac{s}{2} \rceil + 1$ Werte für die Quersumme (bzw. $\frac{s}{2} + 1$, wenn s gerade und $\frac{s+1}{2} + 1$, wenn s ungerade).

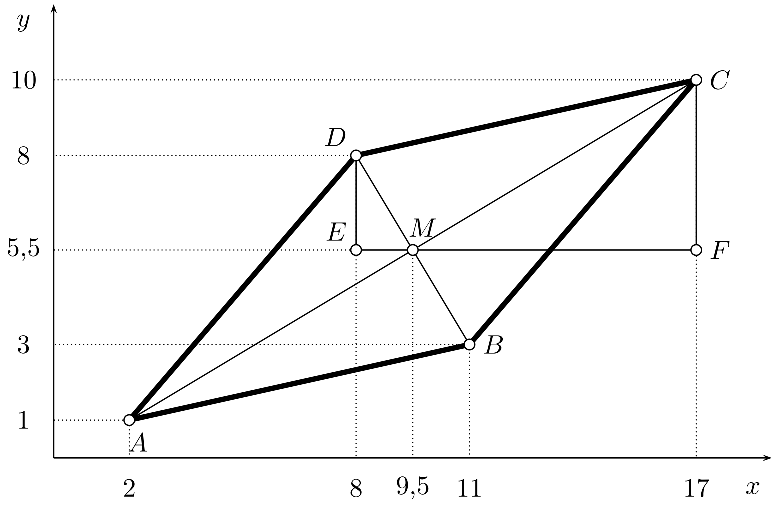
Hinweis: Schüler werden statt der hier formal verdichteten Darstellung eher die Zifferndarstellung der Zwischenergebnisse in Worte fassen. Im ersten Fall bedeutet die Darstellung etwa nur, dass b von hinten nach vorn gelesen erst p Einsen, davor $s-p$ Neunen, davor $2p-s$ Achten, davor eine Neun und davor noch weitere $s - p - 1$ Achten. Solches ist natürlich ebenfalls zu akzeptieren. Wenn das Ergebnis ggf. verbal korrekt beschrieben wird, ist das akzeptabel.

631012 Lösung — *10 Punkte*

Durch Umformen der Gleichungen von g_3 und g_4 erhalten wir für g_3 die Gleichung $y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{4}{3}$ und für g_4 folgt $y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{56}{9}$. Wegen der jeweils gleichen Anstiege und der verschiedenen Schnittstellen mit der y-Achse gibt es zwei Paare zueinander paralleler Geraden: g_1 und g_4 sowie g_2 und g_3. Daher gibt es genau vier Schnittpunkte, die ein Parallelogramm aufspannen.

Um entscheiden zu können, ob dieses Parallelogramm vielleicht noch besondere Eigenschaften hat, werden die Koordinaten der Schnittpunkte (siehe Abbildung 1) berechnet. Dazu sind jeweils ein System aus zwei linearen Gleichungen in den zwei Unbestimmten x und y zu lösen. Wir erhalten, dass sich g_1 und g_3 in $A(2,1)$, g_1 und g_2 in $B(11,3)$, g_2 und g_4 in $C(17,10)$ und g_3 und g_4 in $D(8,8)$ schneiden. Die Diagonalen des Parallelogramms liegen dann auf der Geraden AC mit der Bezeichnung h und auf der Geraden BD, die wir mit k bezeichnen. Den Schnittpunkt der beiden Diagonalen nennen wir M.

Die Anstiege der Geraden h und k können aus den Koordinaten der Punkte, die auf ihnen liegen, berechnet werden. Wir erhalten für h den Anstieg $m_1 = \frac{10-1}{17-2} = \frac{3}{5}$ und für k den Anstieg $m_2 = \frac{8-3}{8-11} = -\frac{5}{3}$. Die Geraden h und k haben demzufolge die Gleichungen $h : y = \frac{3}{5} \cdot x - \frac{1}{5}$ und $k : y = -\frac{5}{3} \cdot x + \frac{64}{3}$, woraus wir durch Schnittpunktberechnung die Koordinaten $M\left(\frac{19}{2}, \frac{11}{2}\right)$ erhalten.



L 631012

Das Anstiegsdreieck MFC der Geraden h hat den rechten Winkel bei F und Kathetenlängen $\left|\overline{MF}\right| = 7{,}5$ und $\left|\overline{FC}\right| = 4{,}5$. Das Anstiegsdreieck DEM der Geraden k hat den rechten Winkel bei E und Katheten der Längen $\left|\overline{DE}\right| = 2{,}5$ und $\left|\overline{EM}\right| = 1{,}5$. Diese sind genau ein Drittel Mal so lang wie die Kathetenlängen des Dreiecks MFC. Die Dreiecke MFC und DEM sind daher ähnlich. Da jeweils ein Schenkel der Winkel $\sphericalangle DME$ und $\sphericalangle FMC$ auf einer Parallelen zur x-Achse liegt und sich beide Winkel wegen der Rechtwinkligkeit der ähnlichen Anstiegsdreiecke zu 90° ergänzen, ist der Winkel $\sphericalangle CMD$ ein rechter Winkel. Die Geraden h und k stehen also senkrecht aufeinander. Damit ist das Parallelogramm $ABCD$ ein Rhombus (eine Raute, ein gleichseitiges Parallelogramm).

Hinweis: Zur Begründung der letzten Aussage überlege man sich, dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in M senkrecht aufeinander stehen und sich als Diagonalen im Parallelogramm halbieren. Sie zerlegen dadurch das Viereck $ABCD$ in vier kongruente Dreiecke. Daraus folgt dann, dass die Seiten gleich lang sind, also $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DA}\right|$ gilt.

Die Orthogonalität von h und k folgt auch aus $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Lösungsvariante: Dass es sich bei dem Parallelogramm um eine Raute handelt, kann auch mit Hilfe des Satzes des Pythagoras gezeigt werden.

$$\begin{aligned}
\left|\overline{AB}\right| &= \sqrt{(11-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{85}\,,\\
\left|\overline{BC}\right| &= \sqrt{(17-11)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{85}\,,\\
\left|\overline{CD}\right| &= \sqrt{(17-8)^2 + (10-8)^2} = \sqrt{85}\,,\\
\left|\overline{DA}\right| &= \sqrt{(8-2)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{85}\,.
\end{aligned}$$

Die Seiten des Parallelogramms sind gleich lang, es handelt sich also um eine Raute.

631013 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Zunächst listen wir die kleinstmöglichen Beispiele auf:

Erstes Beispiel: 48 ist durch 4, 49 ist durch 49 und 50 ist durch 25 teilbar.

Zweites Beispiel: 98 ist durch 49, 99 ist durch 9 und 100 ist durch 100 teilbar.

Drittes Beispiel: 124 ist durch 4, 125 ist durch 25 und 126 ist durch 9 teilbar.

Viertes und fünftes Beispiel: 242 ist durch 121, 243 ist durch 81, 244 ist durch 4 und 245 ist durch 49 teilbar.

Zum systematischen Finden von Beispielen können wir drei paarweise teilerfremde Quadratzahlen wählen, zum Beispiel 4, 9 und 25. Da die drei gesuchten Zahlen aufeinanderfolgend sein sollen, wählen wir zum Beispiel die mittlere als Vielfaches von 4, also $4m$ mit der natürlichen Zahl m. (Eine andere Wahl würde auch zum Ziel führen.) Die beiden anderen Zahlen $4m-1$ und $4m+1$ müssen nun ungerade Vielfache von 25 und 9 sein.

Wählt man $4m+1$ als Vielfaches von 25 aus, so folgt aus $4m+1 = 25 \cdot k$, dass $m = \frac{25k-1}{4} = 6k + \frac{k-1}{4}$ ist. Damit m ganzzahlig ist, wählen wir $k = 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$. Berechnet man für diese Werte von k die von $4m-1$ und $4m+1$, so wird man für $k = 17$ und daraus $m = 106$ fündig. Es gilt $4m-1 = 423 = 9 \cdot 47$, $4m = 424 = 4 \cdot 106$ und $4m+1 = 425 = 25 \cdot 17$, es handelt sich also um drei aufeinanderfolgende Zahlen, die Vielfache von Quadratzahlen größer als 1 sind.

Hätten wir $4m-1$ als Vielfaches von 25 gewählt, so folgt aus $4m-1 = 25 \cdot k$, dass $m = \frac{25k+1}{4} = 6k + \frac{k+1}{4}$. Wir wählen hier $k = 3, 7, 11, 15, 19, \ldots$. Berechnet man für diese Werte von k die von $4m-1$ und $4m+1$, so ergibt sich für $k = 19$, dass $m = 119$ und $4m-1 = 475 = 25 \cdot 19$, $4m = 476 = 4 \cdot 119$ und $4m+1 = 477 = 9 \cdot 53$ ist. Auch dieses Beispiel erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Teil b) Wir gehen vom Beispiel $124 = 4 \cdot 31, 125 = 25 \cdot 5, 126 = 9 \cdot 14$ aus. Das Produkt der Quadratzahlen ist dann $4 \cdot 25 \cdot 9 = 900$. Daher erfüllen auch $124 + 900 = 1024, 125 + 900 = 1025, 126 + 900 = 1026$ und noch allgemeiner mit einer natürlichen Zahl n die Zahlen

$$124 + 900n, \quad 125 + 900n, \quad 126 + 900n$$

als drei aufeinanderfolgende Zahlen die Bedingungen der Aufgabe. Das lässt sich anhand der Darstellungen

$$124 + 900n = 4 \cdot (31 + 225n), 125 + 900n = 25 \cdot (5 + 36n), 126 + 900n = 9 \cdot (14 + 100n)$$

nachvollziehen.

Da die natürliche Zahl n frei gewählt werden kann, gibt es unendlich viele Beispiele.

Teil c) Am Beginn der Lösung zu Teil a) findet sich bereits das kleinstmögliche Beispiel.

Für eine systematischere Betrachtung können wir wieder von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $124+900n$, $125+900n$, $126+900n$ ausgehen. Die vierte darauf folgende Zahl in dieser Folge wäre dann $127+900n$. Wenn wir nun n so wählen, dass $127+900n$ beispielsweise durch 49 teilbar ist, haben wir eine Möglichkeit mit vier aufeinanderfolgenden Zahlen gefunden. Es soll somit $127 + 900n = 49k$ sein. Dann erhalten wir

$$k = \frac{127 + 900n}{49} = 2 + 18n + \frac{29 + 18n}{49}.$$

Für $n = 12$ (findet man durch systematisches Probieren oder mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus) ist k ganzzahlig. Wir erhalten $127 + 900 \cdot 12 = 10927$ und daraus das Beispiel: 10924 ist durch 4, 10925 ist durch 25, 10926 ist durch 9 und 10927 durch 49 teilbar.

Hinweis: In den Teilen a) und c) reicht es aus, die entsprechenden Beispiele anzugeben und (ggf.) zu begründen, warum sie die geforderten Eigenschaften haben. Eine Herleitung ist von den Schülerinnen und Schülern nicht unbedingt anzugeben.

631014 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Genau für $x \geq 7$ sind alle Wurzeln definiert. Quadriert man beide Seiten der Gleichung, erhält man

$$x - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} + x - 6 = 2x - 14\,.$$

Umformen der Gleichung führt zu

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = 4\,.$$

Erneutes Quadrieren und Auflösen der Klammer liefert

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 16 &= 0\,, \\ (x-8)\cdot(x+2) &= 0\,. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x = -2$ und $x = 8$.

Wegen $x \geq 7$ kommt nur $x = 8$ als Lösung in Frage. Die Probe

$$\sqrt{8} - \sqrt{8-6} = 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 8 - 14}$$

zeigt, dass $x = 8$ wirklich eine Lösung ist.

Teil b) Es muss $x \geq 7$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Durch Quadrieren erhält man zunächst

$$x + 5 + 2 \cdot \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-2} + x - 2 = x + 14 + 2 \cdot \sqrt{x+14} \cdot \sqrt{x-7} + x - 7$$

und nach Zusammenfassen und Vereinfachen

$$\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} \cdot \sqrt{x-7} + 2\,.$$

Es wird erneut quadriert

$$(x+5)\cdot(x-2) = (x+14)\cdot(x-7) + 4 \cdot \sqrt{x+14} \cdot \sqrt{x-7} + 4\,.$$

und umgeformt

$$21 - x = \sqrt{x+14} \cdot \sqrt{x-7}\,.$$

Nun wird ein drittes Mal quadriert und umgeformt zu

$$x^2 - 42x + 441 = x^2 + 7x - 98\,.$$

Man erhält als einzigen Lösungskandidaten $x = 11$.

Die Probe bestätigt, dass $x = 11$ tatsächlich Lösung ist. Man erhält eine wahre Aussage.

$$\begin{aligned} \sqrt{11+5} + \sqrt{11-2} &= \sqrt{11+14} + \sqrt{11-7}\,, \\ 4 + 3 &= 5 + 2\,. \end{aligned}$$

631015 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Auf die Punkte A, B und P wenden wir die Dreiecksungleichung an.

$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{PB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|\,. \tag{1}$$

Dabei tritt die Gleichheit genau dann ein, wenn P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt. (Man kann diese Aussage in die Alltagssprache übersetzen: Der Weg von A nach B über P ist am kürzesten, wenn P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.) Wenn P auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann ist $|\overline{AP}| + |\overline{PB}| = |\overline{AB}|$ (die Länge der Strecke $\overline{AB}$) die minimale Abstandssumme. Die Menge der gesuchten Punkte ist daher die Menge der Punkte, die auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen.

Teil b) Für die Punkte A, P, C gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$|\overline{AP}| + |\overline{CP}| \geq |\overline{AC}|\,, \tag{2}$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn P auf der Strecke $\overline{AC}$ liegt. Außerdem gilt für die Punkte B, P, D nach der Dreiecksungleichung

$$|\overline{BP}| + |\overline{DP}| \geq |\overline{BD}|\,, \tag{3}$$

wobei auch hier genau dann Gleichheit eintritt, wenn P auf der Strecke $\overline{BD}$ liegt. Addition der Ungleichungen (2) und (3) ergibt

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}| \geq |\overline{AC}| + |\overline{BD}|\,,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn P sowohl auf $\overline{AC}$ als auch auf $\overline{BD}$ liegt und damit der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, also der Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ ist.

Daraus folgt: Die Abstandssumme wird genau dann minimal, wenn P der Mittelpunkt des Quadrates ist.

Anmerkung: Die Eigenschaft, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, haben wir nicht verwendet. Die Aussage ist also auch für allgemeinere Vierecke gültig.

631016 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Vier Straßen reichen aus. Wir wählen eine der 5 Städte aus, wir nennen sie A, und bauen zu jeder der anderen vier Städte B, C, D, E eine Straße. Dann erreicht man von A aus die anderen vier Städte, die wiederum über A miteinander verbunden sind.

Hinweis: Zur Begründung reicht hier eine Skizze aus.

Dagegen reichen drei Straßen nicht. Angenommen, drei Straßen reichen aus. Dann wählen wir eine der drei Straßen aus und benennen die Endpunkte mit A, B. Damit auch eine dritte Stadt C erreichbar ist, muss eine zweite Straße von A oder von B nach C führen. Mit Hilfe der dritten Straße müsste nun die Verbindung zu den verbleibenden Städten D, E hergestellt werden. Dazu ist eine Straße nicht ausreichend.

Hinweis: Hier kann auch die lapidare Feststellung akzeptiert werden.

Teil b) Wir färben die direkten Verbindungsstraßen des Straßennetzes Schritt für Schritt in beliebiger Reihenfolge rot. Als *Gebiet* bezeichnen wir jede maximale Menge von Städten, die durch rote Straßen miteinander verbunden sind.

Am Anfang ist noch keine Verbindungsstraße rot gefärbt und damit jede der 2023 Städte ein eigenes Gebiet. Sind bereits einige Verbindungsstraßen rot gefärbt, so kann die nächste rot zu färbende Verbindungsstraße nicht innerhalb eines Gebiets liegen, da sonst die Endpunkte dieser Straße in jenem Gebiet über zwei verschiedene Wege miteinander verbunden wären. Jede neu rot zu färbende Verbindungsstraße muss also zwei Gebiete verbinden, womit sich die Zahl der Gebiete um genau eins verringert.

Am Ende sind alle Städte miteinander verbunden und bilden folglich ein einziges Gebiet. Nach dem angegebenen Verfahren ist das nach genau 2022 Schritten erreicht, und 2022 ist folglich auch die Anzahl der Verbindungsstraßen.

Zweite Lösung: Wir zeigen allgemeiner, dass ein Straßennetz mit n Städten, in dem je zwei Städte auf genau eine Weise über gegebenenfalls mehrere andere Städte verbunden sind, genau $n-1$ direkte Verbindungsstraßen hat.

Dies ist offensichtlich für $n=1$ (keine Verbindungsstraße nötig) und für $n=2$ (es wird genau eine Verbindungsstraße benötigt) richtig.

Sei nun $n>2$. Als Weglänge von A_i nach A_j bezeichnen wir die Anzahl der Straßen auf dem Weg von A_i nach A_j. Betrachtet man alle möglichen Wege zwischen zwei Städten, dann haben sie alle eine endliche Länge, weil es stets genau einen Weg gibt und daher kreisförmige Wege ausgeschlossen sind. Somit gibt es mindestens einen Weg, der am längsten ist. Wir wählen einen dieser längsten Wege. Er hat einen Anfangspunkt P und einen Endpunkt Q. Von P und Q geht jeweils genau eine Verbindungsstraße aus. Ansonsten wäre $\overline{PQ}$ nicht am längsten. Streicht man diese beiden Verbindungsstraßen zusammen mit P und Q aus dem Netz, dann bleibt die geforderte Eigenschaft des Netzes erhalten und man hat zwei Städte und zwei Straßen weniger.

Ist noch immer $n-2>2$, so sucht man erneut einen der längsten Wege im verkleinerten Netz aus und streicht wieder den Anfangs- und den Endpunkt sowie die beiden hinführenden Straßen, ohne dass sich die geforderte Eigenschaft des Netzes ändert.

Am Ende bleiben nur noch eine Stadt oder zwei Städte übrig. Für diesen Fall hatten wir schon gezeigt, dass die Zahl der Verbindungsstraßen gleich $n-1$ ist.

Die Anzahl der Städte ist daher um eins größer als die Anzahl der Straßen. In unserem Fall sind es 2022 Straßen.

Hinweis: Ein exakter Beweis ist mit vollständiger Induktion möglich, wobei zu berücksichtigen ist, dass von n auf $n+2$ geschlossen wird, also die Induktionsvoraussetzung für zwei Startwerte zu prüfen ist. Diese exakte Argumentation wird von den Schülerinnen und Schülern nicht verlangt.

Dritte Lösung: Wir wählen eine der Städte S aus und bezeichnen mit M_k mit $k \geq 0$ die Menge aller Städte, die von S aus über genau k Verbindungsstraßen erreicht werden können. Dann ist $M_0 = \{S\}$ und jede Stadt S' aus der Menge M_k mit $k>0$ ist mit genau einer Stadt aus der Menge M_{k-1} über eine Verbindungsstraße verbunden. Da S' von S aus erreichbar sein muss, muss es mindestens eine solche Stadt in M_{k-1} geben. Andererseits kann es keine zwei solchen Städte in M_{k-1} geben, da sonst S' über mehr als einen Weg erreichbar wäre.

Die Anzahl der Verbindungsstraßen ist also gleich der Anzahl der Städte in den Mengen M_k mit $k>0$ und somit um eins kleiner als die Anzahl aller Städte. Die gesuchte Anzahl von Verbindungsstraßen ist also gleich 2022.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 631011 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 6 Punkte

Berechnung von $Q(a)$ .... 3 Punkte

Berechnung von $Q(b)$ .... 3 Punkte

Teil b) .... 4 Punkte

Die Berechnung der auftretenden Produkte kann natürlich auch mittels schriftlicher Multiplikation erfolgen.

Aufgabe 631012 *Insgesamt: 10 Punkte*

Zwei Paare paralleler Seiten mit vier Schnittpunkten .... 3 Punkte

Das Vieleck ist ein Parallelogramm .... 1 Punkt

Berechnen der Schnittpunkte .... 2 Punkte

Nachweis, dass das Parallelogramm ein Rhombus ist .... 4 Punkte

Aufgabe 631013 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) je Beispiel 2 Punkte .... 6 Punkte

Teil b) .... 2 Punkte

Teil c) .... 2 Punkte

Aufgabe 631014 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) vollständiger Lösungsweg mit Probe .... 3 Punkte

Teil b) vollständiger Lösungsweg mit Probe .... 7 Punkte

Aufgabe 631015 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) Dreiecksungleichung anwenden; gesuchte Menge und Wert beschreiben .... 3 Punkte

Es werden auch korrekte umgangssprachliche Beschreibungen akzeptiert.

Teil b) Herleitung, dass P der Mittelpunkt des Quadrates ist .... 7 Punkte

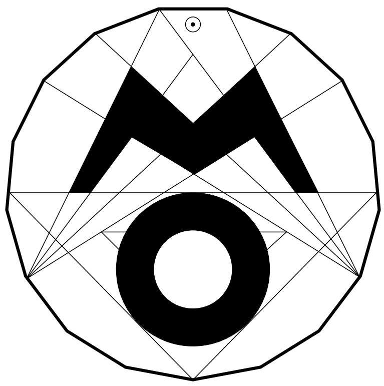
Aufgabe 631016 *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) 4 Straßen reichen aus, 3 nicht .... 2 Punkte

Es werden auch korrekte Beschreibungen und Skizzen akzeptiert.

Teil b) Antwort und Begründung .... 8 Punkte

- Angabe der korrekten Antwort .... 1 Punkt
- unvollständige Beweisansätze: maximal .... 3 Punkte
- Vervollständigung zu Beweis der Korrektheit .... 4 Punkte



63. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Lösungen

631211 Lösung *10 Punkte*

Da $12 = 2^2 \cdot 3$ ist, kann eine Zahl n mit der gesuchten Eigenschaft außer den Ziffern 0 und 1 nur die Ziffern 2, 6 oder 3, 4 oder 2, 2, 3 enthalten.

Zunächst werden die Zahlen n mit zwei von 0 und 1 verschiedenen Ziffern betrachtet. Es gibt in der vierstelligen Zahl n zwei Positionen, die von diesen Ziffern eingenommen werden können. Zunächst wird die Anzahl der Zahlen bestimmt, bei denen die erste Stelle von einer dieser Ziffern eingenommen wird. Für die andere gibt es dann drei mögliche Positionen.

Es gibt jeweils vier Möglichkeiten, die Ziffern 2 und 6 bzw. 3 und 4 an die beiden Positionen zu setzen. Die restlichen Positionen können beliebig mit den Ziffern 0, 0 oder 0, 1 oder 1, 0 oder 1, 1 von links nach rechts besetzt werden. Somit gibt es in diesem Fall insgesamt $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ Zahlen n mit der gewünschten Eigenschaft.

Bei den Zahlen, an denen die erste Position noch frei ist, gibt es für die zweite freie Stelle ebenfalls drei Möglichkeiten. Diese freien Stellen können nur mit 1, 0 oder 1, 1 aufgefüllt werden, da sonst keine vierstellige Zahl entstehen würde. Daher gibt es in diesem Fall $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ weitere Zahlen.

Nun werden die Zahlen n betrachtet, die die Ziffern 2, 2 und 3 enthalten. Es gibt vier Möglichkeiten, Positionen für diese drei Ziffern in der vierstelligen Zahl n auszuwählen. Bei jeder Möglichkeit kann eine der drei Positionen für die Ziffer 3 ausgewählt werden. Die übrig gebliebene Position kann entweder mit der Ziffer 0 oder 1 aufgefüllt werden, wobei zu beachten ist, dass an der führenden Stelle wiederum nicht die Ziffer 0 stehen darf. Damit gibt es $3 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 = 21$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es somit $48 + 24 + 21 = 93$ vierstellige Zahlen n mit $P(n) = 12$.

631212 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Wir nehmen an, dass drei Zahlen x, y und z die drei Gleichungen erfüllen. Da $|y+1| \geq 0$ gilt, folgt $x \leq 1$ aus (1). Dann gilt $x - 2 \leq -1 < 0$, und wir können $|x-2| = 2-x$ in (3) einsetzen. Wir erhalten $z + 2 - x = 1$, also $z = x - 1$. Setzen wir dies in (1) und (2) ein, verbleiben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten,

$$\begin{aligned} x + |y+1| &= 1\,, \\ y + |x+1| &= 1\,. \end{aligned}$$

Wegen der Nichtnegativität der Beträge folgt daraus analog $y \leq 1$ sowie

$$\begin{aligned} x - 1 &= -\,|y+1|\,, \\ |x+1| &= 1 - y\,, \end{aligned}$$

nach Quadrieren also

$$x^2 - 2x + 1 = y^2 + 2y + 1\,,$$
$$x^2 + 2x + 1 = y^2 - 2y + 1$$

und als Viertel der Differenz beider Gleichungen

$$-x = y\,.$$

Jede Lösung von (1)–(3) erfüllt also die Bedingungen $y = -x$, $z = x - 1$ sowie die Ungleichungen $x, y \leq 1$ oder $-1 \leq x \leq 1$.

Wir untersuchen in einer Probe, welche Lösungen sich daraus ergeben.

Zu (1): Wegen $x \leq 1$ gilt $y+1 = 1-x \geq 0$ und $|y+1| = 1-x$, also $x+|y+1| = x+(1-x) = 1$; die Gleichung (1) ist immer erfüllt.

Zu (2): Wegen $x \geq -1$ folgt $z+2 = (x-1)+2 = x+1 \geq 0$, $|z+2| = x+1$ und $y+|z+2| = -x+(x+1) = 1$; die Gleichung (2) ist ebenfalls erfüllt.

Zu (3): Aus $x \leq 1$ folgt $x-2 \leq 1-2 < 0$, $|x-2| = 2-x$ und $z+|x-2| = (x-1)+(2-x) = 1$; auch (3) gilt immer.

Es gibt also unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems, die man erhält, indem man ein beliebiges x mit $-1 \leq x \leq 1$ wählt und $y = -x$ und $z = x - 1$ setzt.

Die Menge der Lösungen lässt sich auch formal in der Form $\{(t, -t, t-1) \mid -1 \leq t \leq 1\}$ schreiben.

Zweite Lösung: Auflösen der Beträge in den Gleichungen des Systems liefert insgesamt acht Gleichungssysteme

$$x \pm (y+1) = 1\,, \tag{1}$$
$$y \pm (z+2) = 1\,, \tag{2}$$
$$z \pm (x-2) = 1\,. \tag{3}$$

Diese werden im Folgenden mit einer vollständigen Fallunterscheidung über die acht Kombinationen der drei Vorzeichen betrachtet.

Fall 1: Vorzeichen $+,+,+$. Dann sind $y \geq -1$, $z \geq -2$, $x \geq 2$ (in der Folge der Gleichungen (1)–(3)). Die Kombination (1) + (2) − (3) der drei Gleichungen liefert $2y + 5 = 1$, also $y = -2$, im Widerspruch zu $y \geq -1$.

Fall 2: Vorzeichen $+,+,-$. Dann sind $y \geq -1$, $z \geq -2$, $x < 2$. Die Summe (1) + (3) ergibt $y + z + 3 = 2$, äquivalent zu (2). Wenn also (1), d. h. $y = -x$, und (3), d. h. $z = x - 1$, erfüllt sind, gilt das Gleichungssystem. Die Voraussetzungen $y \geq -1$ und $z \geq -2$ sind für $-1 \leq x \leq 1$ erfüllt. Dann gilt auch $x < 2$, und $(x, y, z) = (x, -x, 1 - x)$ ist Lösung.

Fall 3: Vorzeichen $+,-,+$. Dann sind $y \geq -1$, $z < -2$, $x \geq 2$. Die Kombination (1) − (2) − (3) liefert $5 = -1$, einen Widerspruch.

Fall 4: Vorzeichen $+,-,-$. Dann sind $y \geq -1$, $z < -2$, $x < 2$. Die Kombination (1) − (2) + (3) der Gleichungen liefert jetzt $2z + 5 = 1$. Das steht im Widerspruch zu $z < -2$.

Fall 5: Vorzeichen $-,+,+$. Dann sind $y < -1$, $z \geq -2$, $x \geq 2$. Die Kombination (1) + (2) − (3) liefert mit $3 = 1$ eine falsche Aussage.

Fall 6: Vorzeichen $-,+,-$. Dann sind $y < -1$, $z \geq -2$, $x < 2$. Die Kombination −(1) + (2) − (3) ergibt $2y + 1 = -1$ im Widerspruch zu $y < -1$.

Fall 7: Vorzeichen $-, -, +$. Dann sind $y < -1$, $z < -2$, $x \geq 2$. Aus der Kombination $-(1) + (2) + (3)$ erhalten wir $2y - 3 = 1$ im Widerspruch zu $y < -1$.

Fall 8: Vorzeichen $-, -, -$. Dann sind $y < -1$, $z < -2$, $x < 2$. Die Summe $(1) + (2) + (3)$ liefert $-1 = 3$; das ist ebenfalls unmöglich.

Nur im Fall 2 erhalten wir die Lösungen wie in der ersten Lösung angegeben.

631213 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Wegen $0° < |\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle CAF| < 90° = |\sphericalangle DAI|$ liegt der Schnittpunkt S zwischen den Punkten D und I. Die Seite $\overline{CF}$ gehört zu zwei Quadraten, die damit gleiche Seitenlängen haben. Insbesondere gilt $|\overline{CF}| = |\overline{EF}|$ und $|\overline{BC}| = |\overline{DE}|$.

Deshalb ist es möglich, das Dreieck ACF so um den Punkt F zu drehen, dass der Bildpunkt C' von C mit E zusammenfällt (Abb. L 631213 a). Dann ist der Drehwinkel ein rechter Winkel, und das Bild von B fällt in $B' \equiv D$. Bei dieser Drehung fällt der Bildpunkt A' von A auf die Verlängerung der Strecke $\overline{B'C'}$ über B' hinaus. Damit liegen A' und I auf verschiedenen Seiten der Geraden AF.

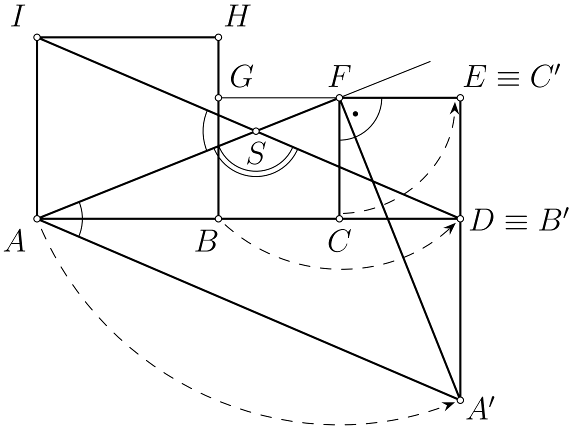
Es gilt $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}| = |\overline{AI}|$. Die Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{AI}$ stehen beide senkrecht auf $\overline{AD}$, also sind sie parallel, und das Viereck $AA'DI$ ist ein Parallelogramm. Das Dreieck $AA'F$, das sich aus der Drehung ergibt, ist gleichschenklig mit einem rechten Winkel bei F.

Es gilt für Wechselwinkel $|\sphericalangle ISA| = |\sphericalangle A'AF| = 45°$, und schließlich folgt für Nebenwinkel

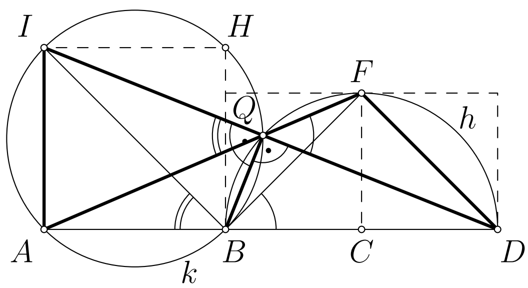
$$|\sphericalangle ASD| = 180° - |\sphericalangle ISA| = 135°\,,$$

das Ergebnis.

Bemerkung: Bei der Nutzung von $\sphericalangle DSF$ als Stufenwinkel zu $\sphericalangle A'AF$ (anstelle des Wechselwinkels) muss zusätzlich begründet werden, dass S zwischen A und F liegt. Das folgt beispielsweise aus $|\sphericalangle IDA| < |\sphericalangle IBA| = 45° = |\sphericalangle FDA|$.



L 631213 a



L 631213 b

Zweite Lösung: Wegen $|\overline{CF}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ liegt F auf einem Halbkreis h über der Strecke $\overline{BD}$. Der Umkreis k des Quadrats $ABHI$ und h schneiden sich neben B in einem weiteren Punkt Q, siehe Abb. L 631213 b. Es wird behauptet, dass die Punkte Q und S zusammenfallen.

In der Tat sind die Strecken $\overline{BI}$ und $\overline{BD}$ Durchmesser in k bzw. h, sodass nach dem Satz des Thales $|\sphericalangle IQB| = |\sphericalangle BQD| = 90°$ gilt. Daraus folgt $|\sphericalangle IQD| = 180°$, der Punkt Q liegt auf der Geraden DI.

Da nach Konstruktion BH tangential zu h verläuft und BF Tangente an k ist, liegt Q auf den gleichen Kreisbögen wie B über $\overline{AI}$ in k bzw. $\overline{DF}$ in h. Insbesondere liegen A und F auf verschiedenen Seiten der Geraden DI durch Q. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt

$$|\sphericalangle IQA| = |\sphericalangle IBA| = 45^\circ \qquad \text{und} \qquad |\sphericalangle DQF| = |\sphericalangle DBF| = 45^\circ\,,$$

sodass aus einer Umkehrung des Scheitelwinkelsatzes folgt, dass auch A, Q und F auf einer gemeinsamen Gerade liegen. Folglich stimmt Q tatsächlich mit dem eindeutigen Schnittpunkt S von AF und DI überein.

Die gesuchte Winkelgröße ist somit

$$|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle AQD| = 180^\circ - |\sphericalangle IQA| = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ\,.$$

Dritte Lösung: Es sei K der Punkt, der aus dem Mittelpunkt M des Quadrats $ABHI$ durch Spiegelung an der Geraden AB entsteht. Offenbar ist $AKBM$ ein Quadrat, also $|\sphericalangle BKA| = 90^\circ$. Da $\overline{BF}$ ebenfalls eine Quadratdiagonale ist, sind F, B und K kollinear, vergleiche Abbildung L 631213 c.

Es seien nun $a = \left|\overline{AB}\right|$ und $b = \left|\overline{CF}\right|$ die Seitenlängen der Quadrate. Dann erhalten wir

$$\left|\overline{AI}\right| = a \qquad \text{und} \qquad \left|\overline{AD}\right| = a + 2b\,.$$

Da weiterhin $\overline{BF}$ eine Diagonale im Quadrat $BCFG$ ist und $\overline{KA}$ sowie $\overline{KB}$ gespiegelte halbe Diagonalen des Quadrats $ABHI$ sind, gelten auch

$$\left|\overline{KA}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad \left|\overline{KF}\right| = \left|\overline{KB}\right| + \left|\overline{BF}\right| = \frac{a}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,b = \frac{a+2b}{\sqrt{2}}\,.$$

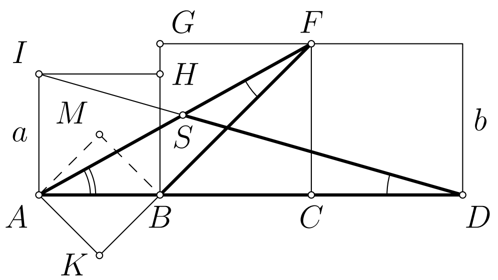
Folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke ADI und KFA zueinander ähnlich. Insbesondere gilt $|\sphericalangle IDA| = |\sphericalangle AFK|$, also

$$|\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle AFB|\,. \tag{1}$$

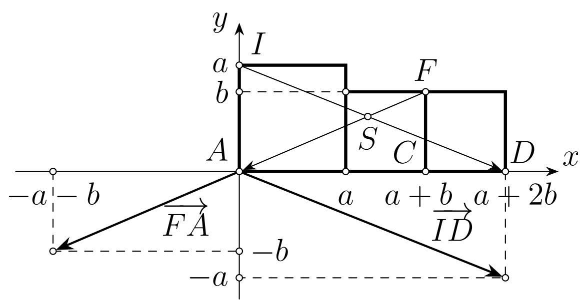
Die Dreiecke ADS und ABF haben den Winkel $\sphericalangle DAF$ gemeinsam. Die Gleichung (1) zeigt somit, dass sie entgegengesetzt orientiert ähnlich sind.

Daraus folgt

$$|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle FBA| = |\sphericalangle FBG| + |\sphericalangle HBA| = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ\,.$$



L 631213 c



L 631213 d

Vierte Lösung: Es wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt. Der Punkt A wird dabei als Koordinatenursprung gewählt, die Gerade g als x-Achse. Dann liegt I auf der y-Achse. Die Achsen seien so orientiert, dass die drei Quadrate im ersten Quadranten zu liegen kommen.

Mit $a = |\overline{AI}|$ und $b = |\overline{CF}|$ haben die Punkte A, D, F und I dann folgende Koordinaten (Abbildung L 631213 d):

$$I = I(0, a)\,, \qquad F = F(a+b, b)\,,$$
$$A = A(0, 0)\,, \qquad D = D(a+2b, 0)\,.$$

Daraus ergeben sich die Vektoren

$$\overrightarrow{FA} = -(a+b, b) \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{ID} = (a+2b, -a)\,.$$

Mit der Schreibweise $\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos|\sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = x_1x_2 + y_1y_2$ für das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ und $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ ergibt sich für den gesuchten Winkel

$$\begin{aligned}
\cos|\sphericalangle ASD| = \cos\left|\sphericalangle\big(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{ID}\big)\right| &= \frac{\overrightarrow{FA} \circ \overrightarrow{ID}}{|\overrightarrow{FA}| \cdot |\overrightarrow{ID}|} \\
&= -\frac{(a+b)(a+2b) - ab}{\sqrt{(a+b)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a+2b)^2 + a^2}} \\
&= -\frac{a^2 + 2ab + 2b^2}{\sqrt{a^2 + 2ab + 2b^2} \cdot \sqrt{2a^2 + 4ab + 4b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

Da der Winkel ein Innenwinkel des Dreicks ADS ist, d. h. $0° \leq |\sphericalangle ASD| \leq 180°$ gelten muss, folgt hieraus $|\sphericalangle ASD| = 135°$.

631214 Lösung *10 Punkte*

Erste Lösung: Teil a) Für sechs Stapel geben wir eine Strategie an, nach der Anna den Gewinn erzwingen kann. Als ersten Zug entfernt sie zwei Stapel und stellt damit die Situation mit $k = 4$ her, nur dass jetzt Bea als nächste ziehen muss.

Bea kann jetzt nicht weitere zwei Stapel entfernen, weil dann Anna die letzten beiden nimmt und gewonnen hat. Also setzt sie einen Stein der Farbe rot oder grün auf einen Stapel.

Für den restlichen Spielverlauf folgt Anna der folgenden Strategie:

Sie nummeriert die Stapel von links nach rechts von 1 bis 4. Dann sorgt sie dafür, dass nach ihrem Zug die Stapel 1 und 2 sowie die Stapel 3 und 4 jeweils identisch sind, indem sie Beas Zug vom Typ (1) kopiert. Dazu wendet sie Beas Zug auf den jeweils anderen Stapel des Paares an. Dies ist möglich, da Annas Zug immer dann erlaubt ist, wenn vorher Beas Zug erlaubt war.

Entfernt Bea zwei gleichfarbige Stapel, anstatt einen Stein zu legen, so sind die übrigen beiden Stapel ebenfalls gleichfarbig, und Anna gewinnt. Da jeder Stapel jede Farbe maximal einmal enthalten darf, können maximal 8 Steine gelegt werden, bis Bea zwei Stapel nehmen muss.

Damit ist der Beweis erbracht, dass Anna für $k = 6$ eine Gewinnstrategie hat. Zum besseren Verständnis der Strategie sei hier noch der konkrete Spielverlauf dargestellt. Dabei notieren wir jeden Stapel mit einem Buchstaben und zwar:

- s für einen Stapel der Höhe 1 mit einem schwarzen Stein,
- r für einen Stapel der Höhe 2 mit einem roten Stein auf dem schwarzen,
- g für einen Stapel der Höhe 2 mit einem grünen Stein auf dem schwarzen,
- R für einen Stapel der Höhe 3 mit einem roten Stein auf einem Stapel vom Typ g,
- G für einen Stapel der Höhe 3 mit einem grünen Stein auf einem Stapel vom Typ r.

Mögliche Züge sind also $s \to r$, $s \to g$, $r \to G$ und $g \to R$. Entfernt werden können Stapel, die mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet werden, unabhängig von Groß- oder Kleinschreibung. In eckigen Klammern geben wir eine vollständige Spielposition an. Das Spiel beginnt also mit $[ssssss]$, und Annas erster Zug führt zu $[ssss]$.

Wir können annehmen, dass Bea einen roten Stein setzt, da wir sonst die Farben Rot und Grün im weiteren Verlauf vertauschen können. Es ergibt sich also zunächst der folgende Spielverlauf:

$$[ssssss] \to [ssss] \to [rsss] \to [rrss]$$

Wir listen jetzt für jeden von Beas möglichen Zügen die Antwort von Anna auf, die obiger Gewinnstrategie entspricht:

$$\begin{aligned}
&[rrss] \to [rr] \to [\,],\\
&[rrss] \to [ss] \to [\,],\\
&[rrss] \to [Grss] \to [GGss],\\
&[rrss] \to [rrrs] \to [rrrr],\\
&[rrss] \to [rrgs] \to [rrgg].
\end{aligned}$$

Danach ergeben sich die Spielverläufe

$$\begin{aligned}
&[GGss] \to [GG] \to [\,],\\
&[GGss] \to [ss] \to [\,],\\
&[GGss] \to [GGrs] \to [GGrr],\\
&[GGss] \to [GGgs] \to [GGgg],\\
&[rrrr] \to [rr] \to [\,],\\
&[rrrr] \to [Grrr] \to [GGrr],\\
&[rrgg] \to [rr] \to [\,],\\
&[rrgg] \to [gg] \to [\,],\\
&[rrgg] \to [Grgg] \to [GGgg],\\
&[rrgg] \to [rrRg] \to [rrRR]
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
&[GGrr] \to [GGGr] \to [GGGG],\\
&[GGgg] \to [GGRg] \to [GGRR],\\
&[rrRR] \to [GrRR] \to [GGRR].
\end{aligned}$$

Jetzt kann Bea nur noch zwei Stapel entfernen, worauf Anna die anderen beiden Stapel entfernt. In jedem Fall macht Anna den letzten Zug und gewinnt.

Teil b) Wir geben für Bea eine Strategie an, nach der sie gewinnt, wenn k durch 4 teilbar ist. Genau wie Anna in Aufgabenteil a) teilt sie die Stapel in Paare auf: $(1,2), (3,4), (5,6), \ldots$ Beas Ziel ist es, dass nach ihrem Zug immer gilt:

B1: Die Anzahl an Stapelpaaren ist gerade, die Anzahl der Stapel also durch 4 teilbar.

B2: Die beiden Stapel jeden Paares sehen gleich aus.

Falls Anna einen Zug vom Typ (1) macht, also einen Stein hinzufügt, dann fügt Bea zum anderen Stapel des gleichen Paares einen Stein mit gleicher Farbe hinzu und erfüllt weiterhin die beiden gewünschten Bedingungen B1/B2.

Entfernt Anna ein Paar, dann entfernt Bea ein beliebiges anderes Paar. Wenn Anna zwei Stapel verschiedener Paare entfernt, dann entfernt Bea die jeweiligen Partner, so dass wiederum zwei vollständige Paare verschwinden und die Bedingungen B1/B2 weiterhin zutreffen.

Das Spiel ist endlich, weil jeder Stapel nur maximal drei Steine haben kann und in jedem Zug entweder ein Stein hinzukommt oder zwei Stapel entfernt werden. Eine Spielposition, die keinen Zug mehr erlaubt, muss ausschließlich aus Stapeln der Höhe 3 bestehen, weil sonst ein Zug vom Typ (1) möglich wäre. Es gibt nur die Stapel R und G (Notation siehe oben) der Höhe 3, und zwei gleiche Stapel würden einen Zug vom Typ (2) zulassen. Am Ende des Spiels muss also eine dieser drei Situationen entstehen:

$$[\,], [RG], [GR]$$

Falls Anna den letzten Zug gemacht hat, müsste vor ihrem Zug eine der folgenden Positionen vorgelegen haben, wobei x für einen beliebigen Stapel steht:

$$[xx], [RRRG], [rrRG], [GGGR], [ggGR], [ssGR], [gG], [rR]$$

Keine dieser Möglichkeiten erfüllt B1 und B2. Also macht Bea den letzten Zug und gewinnt, wenn k durch 4 teilbar ist.

Ist k dagegen gerade, aber nicht durch 4 teilbar, kann Anna den Spieß umdrehen: Sie entfernt einfach zwei schwarze Stapel. Danach ist die Anzahl der Stapel durch 4 teilbar, so dass Anna im weiteren die Gewinnstrategie anwenden kann, die eben noch Bea den Sieg gesichert hat.

Für gerade, nicht durch 4 teilbare k gewinnt also Anna, für durch 4 teilbare k Bea.

Zweite Lösung: Wir nennen eine Spielsituation *Gewinnstellung*, wenn es einen Zug gibt, der die aktuelle Spielerin in die Lage versetzt, bei weiterer optimaler Spielweise den Gewinn zu erzwingen. Führt jeder mögliche Zug zu einer Gewinnstellung, nennen wir eine Situation *Verluststellung*.

Die Farbe eines Stapels sei bestimmt durch die Farbe des obersten Steins. Mit s, r bzw. g wird die Anzahl der Stapel in den Farben Schwarz, Rot bzw. Grün und mit $m = s + r + g$ die Gesamtzahl der Stapel einer Stellung bezeichnet. Da diese Anzahl zu Beginn gerade ist und in einem Zug nicht oder um genau 2 abnimmt, bleibt m gerade.

Wir bezeichnen nun als *B-Stellung* (balancierte Stellung) eine Stellung mit gerader Stapelanzahl $m = 2n$, bei der r, g und n von gleicher Parität sind. (Unter Parität einer ganzen Zahl versteht man ihre Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit; in einer B-Stellung sind also r, g und n entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade.)

Stellungen, die keine B-Stellungen sind, nennen wir *U-Stellungen* (unbalancierte Stellungen).

Wir beweisen folgenden

Satz: Eine Stellung ist genau dann eine Verluststellung, wenn sie eine B-Stellung ist.

In der vorigen Lösung haben wir bereits gezeigt, dass das Spiel endlich ist, und die einzig möglichen finalen Verluststellungen bestimmt, nämlich [ ], $[RG]$ und $[GR]$. In jeder dieser Stellungen ist die Stapelanzahl gerade, und es gilt entweder $r = g = n = 0$ oder $r = g = n = 1$; somit handelt es sich um B-Stellungen.

Aus einer B-Stellung wird bei einem Zug vom Typ (1) eine U-Stellung, weil sich die Parität von r oder g ändert, aber die Parität von n erhalten bleibt. Nach dem Zug haben r, g und n also nicht mehr alle gleiche Parität. Bei einem Zug vom Typ (2) ist es umgekehrt: Die Paritäten von r und g bleiben gleich, aber n wird um 1 kleiner.

Um zu zeigen, dass die Spielerin aus einer U-Stellung immer in eine B-Stellung ziehen kann, unterscheiden wir zwei Fälle:

(I) Haben r und g die gleiche Parität, so muss nach Definition einer U-Stellung n die entgegengesetzte Parität haben. Damit können wir zwei gleichfarbige Stapel entfernen und damit n an die Parität von r und g anpassen. Denn aus $r \leq 1$, $g \leq 1$, $s \leq 1$ und $n \geq 1$ würde (wegen $3 \geq r + g + s = 2n \geq 2$) $n = 1$ folgen. Dann müssten r, g und damit auch s gerade, also 0, sein, und man hätte die falsche Aussage $0 + 0 + 0 = 2 \cdot 1$.

(II) Ist die Parität von r und g verschieden, so ist $r + g$ ungerade und damit auch $s = 2n - r - g$, also folgt $s \geq 1$. Eine der beiden Farben g oder r muss in ihrer Parität mit n übereinstimmen. Wir legen daher einen Stein der anderen Farbe auf einen schwarzen Stapel und erreichen eine B-Stellung, weil dann alle drei Paritäten übereinstimmen.

Wenn somit eine Spielerin ihrer Gegenspielerin eine B-Stellung hinterlässt, so erzwingt sie, dass die Gegenspielerin diese in eine U-Stellung überführt, und kann somit anschließend selbst wieder einen Zug ausführen, der auf eine B-Stellung führt. Der Satz ist damit bewiesen.

Da zu Beginn $g = r = 0$ gerade Zahlen sind, gewinnt Anna, wenn n ungerade ist.

Teil a) Für $k = 6$ ist $n = 3$ ungerade. Anna gewinnt.

Teil b) Anna kann den Gewinn erzwingen, wenn $k = 2n$ nicht durch 4 teilbar ist. Ist die Anzahl der Stapel k durch 4 teilbar, hat Bea eine Gewinnstrategie.

Punktverteilungsvorschläge

Die nachstehenden Angaben zur Punktverteilung sowohl für die gesamten Aufgaben als auch für die Teillösungen sind Empfehlungen für die Ausrichter des Wettbewerbs und sollen einer einheitlichen Bewertung dienen. Dies vereinfacht für die Schülerinnen und Schüler ein Nachvollziehen der Bewertung und ermöglicht für die Organisatoren Vergleiche zum Zweck der Entscheidung über die Teilnahme an der nächsten Runde.

Bei der Vielfalt der Lösungsvarianten ist es nicht möglich, Vorgaben für jede Variante zu machen; das Korrekturteam möge aus den Vorschlägen ableiten, welche Vergabe dem in der Schülerlösung gewählten Ansatz angemessen ist. Dabei können auch Lösungsansätze, die angesichts der Aufgabenstellung sinnvoll erscheinen, aber noch nicht erkennen lassen, ob sie wirklich zu einer Lösung führen, einige Punkte erhalten.

Abweichungen von den Vorschlägen müssen von den Ausrichtern des Wettbewerbs ausreichend bekannt gemacht werden. Es wird aber empfohlen, zumindest den prozentualen Anteil der Punkte für Teillösungen beizubehalten.

Aufgabe 631211 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Bei einem Vorgehen entsprechend dem Lösungsvorschlag:

Ansatz mit Primfaktorzerlegung von 12 und Schluss auf mögliche Ziffernauswahlen .... 4 Punkte

Abzählen der zulässigen Permutationen für die Fälle mit zwei von 0 und 1 verschiedenen Ziffern .... 2 Punkte

Abzählen der zulässigen Permutationen für den Fall mit drei von 0 und 1 verschiedenen Ziffern .... 2 Punkte

Zusammenführung zum Gesamtresultat .... 2 Punkte

Aufgabe 631212 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Bei Lösungen, die die notwendigen Bedingungen zunächst herleiten:

Herleitung der notwendigen Bedingungen .... 6 Punkte

Probe und Angabe der Lösung .... 4 Punkte

Bei Arbeiten, die eine vollständige Fallunterscheidung nutzen:

Idee der Fallunterscheidung und Angabe der Lösung .... 2 Punkte

Untersuchung aller acht Fälle .... 8 Punkte

Aufgabe 631213 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Angabe des richtigen Ergebnisses (evtl. nur als Vermutung) .... 1 Punkt

Begründete Berechnung des Winkels .... 7 Punkte

Im Einzelnen

bei einer geometrischen Lösung wie in den ersten drei Lösungen:

> Erläuterte Erweiterung der Aufgabenskizze durch die Einführung hilfreicher geometrische Objekte (Drehungen, Hilfslinien, Kreise, ...), die eine Berechnung des Winkels zulässig machen .... 2 Punkte
>
> Diskussion der Lage des Punktes S bzw. Q (oder Wahl eines Weges, der lageunabhängig ist) .... 1 Punkt
>
> Anwendung geometrischer Sätze und Bestimmung der Größe des Winkels .... 4 Punkte

bei einer analytischen Lösung, wie in der vierten:

- Korrekte Einführung eines Koordinatensystems .... 2 Punkte
- Berechnung der notwendigen geometrischen Größen mit Begründung .... 3 Punkte
- Berechnung des Winkels mit Begründung der Eindeutigkeit des Ergebnisses .... 2 Punkte

Korrektheit und Vollständigkeit der Lösungsdarstellung .... 2 Punkte

Aufgabe 631214 — *Insgesamt: 10 Punkte*

Teil a) .... 4 Punkte

- Angabe einer Gewinnstrategie .... 2 Punkte
- Vollständiger Nachweis der Gewinneigenschaft .... 2 Punkte

Teil b) .... 6 Punkte

- Angabe einer Gewinnstrategie .... 3 Punkte
- Vollständiger Nachweis der Gewinneigenschaft .... 3 Punkte